普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-1

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

本册导引

本册是高中数学选修课程系列2的组成部分，提供给希望在理工（包括部分经济类）等方面发展的学生学习．同学们根据自己的兴趣和对未来发展的愿望选择了系列2，本书将为你展现一个新的学习天地，自信和勤奋将伴你走向成功．

本册内容分设三章，一是“常用逻辑用语”，二是“圆锥曲线与方程”，三是“空间向量与立体几何”．这些内容与数学必修课程联系紧密，是相关内容的进一步完善和发展，也是数学基础的进一步充实和加强．

逻辑用语是数学的基本语言，在思维表达、数学论证、人际交流中有重要作用．其实大家对常用的逻辑用语并不陌生，而且也经常使用，只是在数学规范性要求和符号化表达方面了解不多．第一章“常用逻辑用语”，是以同学们已有的知识和生活经验为基础，着重对命题及其关系进行一般化的研究，有助于同学们准确地理解数学内容，有条理地进行思考和分析，简明、准确地进行表达和交流．这一章只是对逻辑用语进行初步的整理和研究，今后要结合具体数学内容的学习，不断加深对逻辑用语的理解，进一步体会它的运用，并在使用的过程中逐步掌握它的用法．

圆锥曲线是常见的图形，并且具有广泛的应用．同学们已经有了利用坐标法研究直线和圆的经验，第二章“圆锥曲线与方程”将以研究圆锥曲线为载体，引导大家进一步学习坐标法，同时获取有关圆锥曲线的基本知识．解析几何是数学的一个重要分支，直线、圆以及圆锥曲线是解析几何入门研究的基本图形，通过这一章的学习，同学们对解析几何的思想、内容和方法会有更加深刻的认识．

在“立体几何初步”的学习中，同学们利用直观分析和演绎推理的方法，获得了立体几何的基础知识．向量是进行几何研究的有力工具，它不仅形象直观，而且有效能算．第三章“空间向量与立体几何”将把向量及其运算由平面推广到空间，再利用向量工具对空间直线和平面的位置关系及其度量问题进行研究．同学们从中可以体会到向量方法在几何研究中的作用；再联系解析几何，会更清晰地看到几何代数化是几何发展的出路所在．

有了“逻辑”的基石，数学的严谨就有了依托；有了“数与形”的结合，数学的腾飞就添上了翅膀．本册内容的学习，既是数学知识的延拓、思想方法的哺育，又是理性精神的磨砺、数学观念的提升，必将为同学们的进一步发展奠定更加厚实的数学基础．

主　　编　　高存明

本册主编　　邵光砚　邱万作
编　　者　　李建才　邱万作　邵光砚　高存明　龙正武
责任编辑　　龙正武
美术编辑　　王　喆　李宏庆
封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 2-1

B 版

人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组　编著

*

出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

××××印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：8.25　字数：184 000

2007 年 3 月第 2 版　2007 年 7 月第 5 次印刷

印数：00 001～000 000 册

ISBN 978-7-107-18627-1
G・11717(课)　定价：7.80 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版社联系调换
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

目　录

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题与量词

1.2　基本逻辑联结词

1.3　充分条件、必要条件与命题的四种形式

你已经学习了不少数学知识，是否觉得数学是很美的学科，数学学习能使你准确、严格地思考，数学精神能使你一丝不苟、追求完满．但是在学习过程中，有时也会发生一些似乎同数学思想格格不入的事情．例如，考察以下推导：

设 $a=b$，则有

$$
\begin{aligned}
& a^2=ab \\
\Rightarrow\ & a^2-b^2=ab-b^2 \\
\Rightarrow\ & (a+b)(a-b)=b(a-b) \\
\Rightarrow\ & a+b=b \\
\Rightarrow\ & 2b=b \\
\Rightarrow\ & 2=1.
\end{aligned}
$$

这是怎么回事？哪儿出错了？是数学失灵了吗？你要找出问题及其原因，就要学习逻辑，学会用正确的逻辑规则去检验推导过程，去分析导出结论．

本章将以你已有的数学知识为基础，学习常用的逻辑用语及其符号化表达方式，以提高你的逻辑分析、数学表达和逻辑思维能力．

1.1 命题与量词

1.1.1 命题

在数学中，我们常常碰到许多用语言、符号或式子表达的语句．例如：

(1) $\lg 100=2$；

(2) 所有无理数都是实数；

(3) 垂直于同一条直线的两个平面平行；

(4) 函数 $y=2x+1$ 是单调增函数；

(5) 设 a，b，c，d 是任意实数，如果 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$；

(6) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ (α,β 是任意角)．

这些语句都可以判断真假，其中(1)(2)(3)(4)都是真(正确的)，(5)(6)都是假(不正确的)．

像这样一些能判断真假的语句就是我们初中已学习过的命题．

一个命题要么是真，要么是假，但不能既真又假，也不能模棱两可、无法判断其真假．

应该指出：(1) 并不是任何语句都是命题，只有那些能够判断真假的语句才是命题．一般来说，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题，如"三角函数是周期函数吗？""但愿每一个三次方程都有三个实数根！""指数函数的图象真漂亮！"等，都不是命题；(2) 在数学或其他科学技术中，还有一类陈述句也经常出现，如"每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和．(哥德巴赫猜想)""在 2020 年前，将有人登上火星．"等，虽然目前还不能确定这些语句的真假，但是随着科学技术的发展与时间的推移，总能确定它们的真假，人们把这一类猜想仍算为命题．

一个命题，一般可以用一个小写英文字母表示，如 p，q，r，…．

练习A

1. 判断下列语句是不是命题：

(1) $2+2\sqrt{2}$是有理数；

(2) $1+1>2$；

(3) 非典型肺炎是怎样传染的？

(4) 奇数的平方仍是奇数；

(5) 2^{100} 是个大数；

(6) 好人一生平安！

2. 判断下列命题的真假：

(1) 方程 $2x=5$ 只有一个解；

(2) 凡是质数都是奇数；

(3) 方程 $2x^2+1=0$ 有实数根；

(4) 函数 $y=\sin x$ 是周期函数；

(5) 每个函数都是周期函数.

练习B

1. 判断下列语句是不是命题：

(1) $(25-6)\times(35-8)=128$；

(2) 968 能被 11 整除.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 0 不能作除数；

(2) 没有一个无理数不是实数；

(3) 如果空间中的两直线不相交，则这两条直线平行；

(4) 集合 A 是集合 $A\cap B$ 的子集；

(5) 集合 A 是集合 $A\cup B$ 的子集；

(6) 空集是任何集合的子集.

1.1.2　量　词

在数学中，我们经常见到一些含有变量 x 的语句，如“$x^2-1=0$”“$5x-1$ 是整数”等，可用符号 $p(x)$，$q(x)$等表示．由于不知道 x 代表什么数，无法判断它们的真假，因而它们不是命题．然而，当赋予变量 x 某个值或一定的条件时，这些含有变量的语句又变成可以判定真假的语句，从而成为命题．例如

$p(x)$：$x^2-1=0$，不是命题；

$q(x)$：$5x-1$ 是整数，也不是命题.

如果赋予变量 x 某个数值，如 $x=5$，可以分别得出

$$p(5)：5^2-1=0；$$
$$q(5)：5\times5-1 \text{ 是一个整数.}$$

想一想，$p(5)$，$q(5)$ 是命题吗？为什么？

如果在语句 $p(x)$ 或 $q(x)$ 前面加上“对所有整数 x”的条件，又可以得出

p_1：对所有整数 x，$x^2-1=0$；

q_1：对所有整数 x，$5x-1$ 是整数.

思考与讨论

p_1，q_1 是命题吗？你能判断它们的真假吗？

这里，短语“所有”在陈述中表示所述事物的全体，逻辑中通常叫做**全称量词**，并用符号“$\forall$”表示. 含有全称量词的命题，叫做**全称命题**.

事实上，全称命题就是陈述某集合所有元素都具有某种性质的命题，用符号表示上述两个全称命题为

p_1：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$；（假）

q_1：$\forall x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数.（真）

一般地，设 $p(x)$ 是某集合 M 的所有元素都具有的性质，那么全称命题就是形如“对 M 中的所有 x，$p(x)$”的命题. 用符号简记为

$$\boxed{\forall x\in M,\ p(x).}$$

如果在语句 $p(x)$ 或 $q(x)$ 前面加上“有一个整数 x”的条件，还可以得到命题

p_2：有一个整数 x，$x^2-1=0$；（真）

q_2：至少有一个整数 x，$5x-1$ 是整数.（真）

短语“有一个”“有些”“至少有一个”在陈述中表示所述事物的个体或部分，逻辑中通常叫做**存在量词**，并用符号“$\exists$”表示，含有存在量词的命题，叫做**存在性命题**.

事实上，存在性命题就是陈述在某集合中有(存在)一些元素具有某性质的命题，用符号表示上述两个存在性命题为

p_2：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2-1=0$；（真）

q_2：$\exists x\in\mathbf{Z}$，$5x-1$ 是整数.（真）

一般地，设 $q(x)$ 是某集合 M 的有些元素 x 具有的某种性质，那么存在性命题就是形如“存在集合 M 中的元素 x，$q(x)$”的命题，用符号简记为

$$\boxed{\exists x\in M,\ q(x).}$$

例 1 试判断以下命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{N}$，$x^4\geqslant1$；

(3) $\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^3<1$；

（4）$\exists x \in \mathbf{Q}$，$x^2=3$.

分析：要判定一个全称命题是真命题，必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立；但要判定全称命题是假命题，却只要能举出集合 M 中的一个 $x=x_0$，使得 $p(x_0)$ 不成立即可（这就是通常所说的“举出一个反例”）.

要判定一个存在性命题是真命题，只要在限定集合 M 中，能找到一个 $x=x_0$，使 $p(x_0)$ 成立即可；否则，这一存在性命题就是假命题.

解：（1）由于 $\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $x^2 \geqslant 0$，因而有

$$x^2+2 \geqslant 2>0，即\ x^2+2>0.$$

因此命题“$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+2>0$”是真命题.

（2）由于 $0 \in \mathbf{N}$，当 $x=0$ 时，$x^4 \geqslant 1$ 不成立．因此命题“$\forall x \in \mathbf{N}$，$x^4 \geqslant 1$”是假命题.

（3）由于 $-1 \in \mathbf{Z}$，当 $x=-1$ 时，能使 $x^3<1$．因此命题“$\exists x \in \mathbf{Z}$，$x^3<1$”是真命题.

（4）由于使 $x^2=3$ 成立的数只有 $\pm\sqrt{3}$，而它们都不是有理数，因而没有任何一个有理数的平方能等于 3．因此命题“$\exists x \in \mathbf{Q}$，$x^2=3$”是假命题.

一个全称命题，可以包含多个变量，例如：

$$\forall a，b \in \mathbf{R}，(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

全称命题真，意味着对限定集合中的每一个元素都具有某性质，使所给语句真．因此，当给出限定集合中的任意一个特殊的元素时，自然应导出“这个特殊元素具有这个性质”（这类似于“代入”思想）．例如，因为

$$“\forall a，b \in \mathbf{R}，(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3”真，$$

所以，当 $a=3$，$b=5$ 时，

$$(3+5)(9-15+25)=3^3+5^3$$

自然是正确的.

用以上思想去分析本章引言中“$2=1$”的错误，就可以说清道理了．由 $a=b$ 命题真，可以导出以下三个命题真：$a^2=ab$，$a^2-b^2=ab-b^2$，$(a+b)(a-b)=b(a-b)$．但下一步导出 $a+b=b$ 是错误的，由于它引用了一个不真的全称命题“$\forall d \in \mathbf{R}$，等式两边可以同时除以 d，等式仍然成立”．同样的错误是由 $2b=b$ 导出 $2=1$.

练习A

1. 判断下列语句是不是全称命题或者存在性命题，如果是，用量词符号表达出来：

（1）中国的所有江河都流入太平洋；

（2）0 不能作除数；

（3）任何一个实数除以 1，仍等于这个实数；

(4) 每一个非零向量都有方向.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x+2=0$；

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1=0$；

(3) $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2=2$；

(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，$4x^2>2x-1+3x^2$.

3. 试用两种以上的表达方法，叙述以下命题：

(1) 正方形都是矩形；

(2) 有一个质数是偶数.

练习B

1. 判断下列语句是不是命题：

(1) 人会长生不老；

(2) 有的人会长生不老；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x<\tan x$；

(4) $\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x<\tan x$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 在平面直角坐标系中，任意有序实数对(x, y)，都对应一点P；

(2) 存在一个函数，既是偶函数又是奇函数；

(3) 每一条线段的长度都能用正有理数表示；

(4) 存在一个实数，使等式$x^2+x+8=0$成立.

习题1-1 A

1. 判断下列语句是不是命题，如果是，说明其真假：

(1) 奇数不是偶数；

(2) 无理数是$\sqrt{2}$；

(3) 有两个无理数的乘积等于有理数；

(4) 两个向量的夹角可以大于$180°$；

(5) 指数函数是递增函数吗?

2. 设语句$q(x)$：$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$：

(1) 写出 $q\left(\frac{\pi}{2}\right)$，并判断它是不是真命题；

(2) 写出“$\forall a\in\mathbf{R}$，$q(a)$”，并判断它是不是真命题.

3. 判断下列语句是不是命题，如果是，说明其是全称命题还是存在性命题：

(1) 有一个实数 a，a 不能取对数；

(2) 所有不等式的解集 A，都有 $A\subseteq\mathbf{R}$；

(3) 所有函数都是周期函数；

(4) 有的向量方向不定.

4. 用量词符号“$\forall$”“$\exists$”表示下列命题：

(1) 实数都能写成小数形式；

(2) 存在凸 n 边形，它的内角和等于 2π；

(3) 任意一个实数乘以 -1 都等于它的相反数；

(4) 存在实数 x，有 $x^3>x^2$；

(5) 对任意角 α，都有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

5. 判断下列命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+1>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 是有理数；

(3) $\exists\alpha$，$\beta\in\mathbf{R}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$；

(4) $\exists x$，$y\in\mathbf{Z}$，$3x-2y=10$；

(5) $\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，方程 $ax+b=0$ 恰有一个解.

6. 试试看：

(1) 找一条你们班上所有学生共有的“性质”，把它写成一个全称真命题；

(2) 确定一条你们班上有些学生具有的“性质”，把它写成存在性真命题.

习题 1－1 B

1. 用全称量词或存在量词表示下列语句：

(1) 有理数都能写成分数形式；

(2) n 边形的内角和等于 $(n-2)\times180^\circ$；

(3) 两个有理数之间，都有另一个有理数；

(4) 有一个实数乘以任意一个实数的积都等于 0.

2. 举反例证明下列命题是假命题：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|>0$；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x^2+2x-3>0$；

(3) 任意一元二次方程都有实数解.

3. 设 $p(x)$：$2^x>x^2$，问：

(1) $p(5)$是真命题吗?

(2) $p(-1)$是真命题吗?

4. 为使下列 $p(x)$ 为真命题，求 x 的取值范围：

(1) $p(x)$：$x+1>x$；

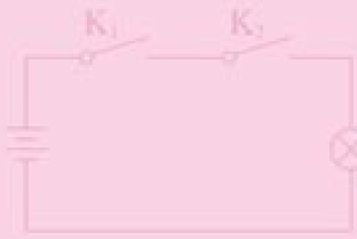
(2) $p(x)$：$x^2-5x+6>0$；

(3) $p(x)$：$\sin x>\cos x$.

5. 下列各命题中变量 n 的取值范围都为整数，确定各命题的真假：

(1) $\forall n$，$n^2\geqslant n$； (2) $\exists n$，$n^2<n$.

1.2 基本逻辑联结词



1.2.1 “且”与“或”

在自然语言中，我们经常使用联结词“且”“或”“非”等，但是它们在不同的句子中有着不同的含义．在逻辑或数学中使用这些词，是用来联结两个命题，构成一个新命题的，它有着精确的含义．这些词在使用中，不能多义或引起歧义．下面介绍数学或逻辑中使用联结词“且”“或”“非”的精确含义．

1. 且

逻辑联结词“且”与日常语言中的“并且”“及”“和”相当．在日常语言中常用“且”联结两个语句．例如，“他是共青团员，且学习成绩全班第一”，这个语句表达的意义是，这个同学既是共青团员，他的学习成绩又是全班第一．显然，这个语句只有在以上两层意思都真时，它表达的意思才是真实的．否则，只要有一层意思为假，它表达的意思就不是真实的．

设命题

$$p：2\ 是质数；\qquad q：2\ 是偶数．$$

用“且”联结可构成新命题

2 是质数且是偶数．

一般地，用逻辑联结词“且”把命题 p 和 q 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p\wedge q,$$

读作“p 且 q”．

现在的问题是，如何由命题 p，q 的真假，来确定新命题 $p\wedge q$ 的真假．

联想自然语言中“并且”的含义，我们可以得出：

如果 p，q 都是真命题，则 $p\wedge q$ 是真命题；如果 p，q 两个命题中，至少有一个是假命题，则 $p\wedge q$ 是假命题．反过来，如果 $p\wedge q$ 是真命题，则 p，q 一定都是真命题；如果 $p\wedge q$ 为假命题，则 p，q 两个命题中，至少有一个是假命题，即以下三种情况一定有一种情况出现

（1）p 真，q 假；（2）p 假，q 真；（3）p 假，q 假．

由“且”的含义，我们可以用“且”来定义集合 A 和集合 B 的交集

$$A\cap B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\}.$$

注 在数理逻辑的书中，通常把如何由 p，q 的真假判定 $p\wedge q$ 真假总结成表Ⅰ.

表Ⅰ

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

想一想，这张表是不是完整地表达了，如何由 p，q 的真假来确定 $p\wedge q$ 的真假.

思考与讨论

如图1-1 所示，一个电路串联一个灯泡和两个开关 S_1，S_2. 当两个开关 S_1 和 S_2 都闭合时，灯就亮；当两个开关 S_1，S_2 只有一个闭合或两个都不闭合时，灯都不会亮. 从中你能理解和体会逻辑联结词“且”的意义吗？

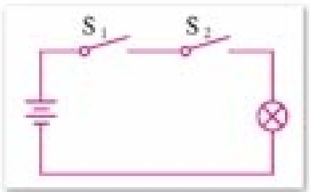


图 1-1

例 1 把下列各组命题用“且”联结组成新命题，并判定其真假：

(1) p：$\lg 0.1<0$，　　q：$\lg 11>0$；

(2) p：$y=\cos x$ 是周期函数，q：$y=\cos x$ 是奇函数.

解：(1) $p\wedge q$：$\lg 0.1<0$ 且 $\lg 11>0$.

因为 $\lg 0.1<0$ 为真命题，$\lg 11>0$ 也为真命题，所以 $p\wedge q$ 为真命题.

(2) $p\wedge q$：$y=\cos x$ 是周期函数且是奇函数.

因为 $y=\cos x$ 是周期函数为真命题，$y=\cos x$ 是奇函数为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题.

2. 或

逻辑联结词“或”的意义和日常语言中的“或者”是相当的. 但是日常语言中的“或者”有两类用法：其一是“不可兼”的“或”，如“向东或向西走”，这里不可能同时向东又向西；其二是“可兼”的“或”，如“要苹果或要香蕉”，这里可以理解为要香蕉不要苹果，也可以理解为不要香蕉要苹果，还可以理解为香蕉、苹果两者都要. “不可兼”的“或”的含义，在程序设计语言中被抽象为“异或”概念，这里暂不学习；这里仅研究“可兼”的“或”在数学中的含义.

设命题

p：24 是 8 的倍数；　　q：24 是 9 的倍数.

用"或"联结，可得新命题

24 是 8 的倍数或 24 是 9 的倍数.

一般地，用逻辑联结词"或"把命题 p，q 联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p \vee q,$$

读作"p 或 q".

如何由命题 p 和命题 q 的真假，来确定新命题 $p \vee q$ 的真假呢？由于这里的"或"有"可兼"的含义，因此，我们规定：

如果 p，q 两个命题中，至少有一个是真命题，则 $p \vee q$ 是真命题；只有当两个命题都为假时，$p \vee q$ 是假命题. 反过来，如果 $p \vee q$ 是真命题，则 p，q 两个命题中，至少有一个是真命题，即以下三种情况必有一种出现：(1) p 真，q 真；(2) p 真，q 假；(3) p 假，q 真. 如果 $p \vee q$ 是假命题，则 p，q 一定都是假命题.

由于命题 p：24 是 8 的倍数为真，命题 q：24 是 9 的倍数为假，因此新命题 $p \vee q$ 为真.

由"或"的含义，我们可以用"或"来定义集合 A 和集合 B 的并集

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

注　在数理逻辑的书中，通常把如何由 p，q 的真假判定 $p \vee q$ 的真假总结成表Ⅱ.

表Ⅱ

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

想一想，这张表是不是完整地表达了，如何由 p，q 的真假来确定 $p \vee q$ 的真假.

思考与讨论

如图 1-2 所示，一个电路并联两个开关 S_1，S_2，再串联一个灯泡. 当两个开关 S_1，S_2 至少有一个闭合时，灯就亮；只有当两个开关 S_1 和 S_2 都断开时，灯才不会亮. 从中你能理解和体会逻辑联结词"或"的意义吗？

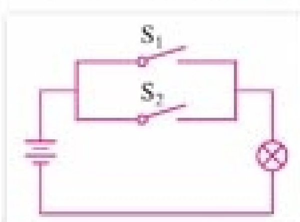


图 1-2

例 2 把下列各组命题用“或”联结成新命题，并判断它们的真假：

（1）p：$10=10$，　　q：$10<10$；

（2）p：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，　　q：$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

解：（1）$p\lor q$：$10=10$ 或 $10<10$.

因为 $10=10$ 为真，$10<10$ 为假，所以命题 $p\lor q$ 是真命题，通常记为 $10\leqslant10$；

（2）$p\lor q$：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

因为 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$ 是真命题，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$ 是真命题，所以命题 $p\lor q$ 是真命题.

练习A

1. 用“且”联结下列各组命题组成新命题，并分别判断它们的真假：

（1）p：28 是 2 的倍数，　　q：28 是 7 的倍数；

（2）p：11 是 143 的因数，　　q：11 是 1 001 的因数；

（3）p：$52<60$，　　q：$62>60$；

（4）p：2 是方程 $x-2=0$ 的根，　　q：2 是方程 $x+1=0$ 的根；

（5）p：$\sqrt{(-1)^2}=-1$，　　q：$|0|=0$.

2. 请你选择已经学过的两个数学命题 p，q，并用“$\land$”联结组成新命题“$p\land q$”，再判断其真假.

3. 将第 1 题中的各组命题，用“或”联结起来组成新命题，并判断它们的真假.

4. 判断下列命题的真假：

（1）$\forall m\in\mathbf{R}$，$m\geqslant m$；　　（2）$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2\leqslant0$；

（3）集合 A 是集合 $A\cap B$ 或是集合 $A\cup B$ 的子集.

5. 请你写出生活和社会中的两个命题 p，q，并用联结词“$\lor$”联结成新命题，再判断其真假.

练习B

1. 用联结词“且”和“或”分别联结下面所给的命题 p，q 构成一个新命题，并判断它们的真假：

（1）p：27 是 3 的倍数，　　q：27 是 9 的倍数；

（2）p：$17<20$，　　q：$17=20$；

（3）p：平行四边形对角线互相平分，　　q：平行四边形的对角线相等.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $10\leqslant 11$；　　(2) $15\geqslant 16$；

(3) $3>2$ 或 $4>5$；　　(4) $3>2$ 且 $4<5$.

3. 判断下列关于集合 A，B 的命题的真假：

(1) 集合 A 是 $A\cap B$ 的子集，且是 $A\cup B$ 的子集；

(2) $A\cap B$ 是 $A\cup B$ 的子集.

1.2.2 “非”（否定）

逻辑联结词“非”（也称为“否定”）的意义是由日常语言中的“不是”“全盘否定”“问题的反面”等抽象而来的.

例如，把命题

“函数 $y=\cos x$ 的最小正周期是 2π”

加以否定，就构成了新的命题

“函数 $y=\cos x$ 的最小正周期不是 2π”.

由此可见，如果原命题是真命题，则它的否定就应该是假命题.

一般地，对命题 p 加以否定，就得到一个新的命题，记作

$$\neg p,$$

读作“非 p”或“p 的否定”.

显然，$\neg p$ 与 p 不能同真或同假，其中一个为真，另一个必定为假．它们是互为否定的，从而有

$$\neg(\neg p)=p.$$

由“非”的含义，我们可以用“非”来定义集合 A 在全集 U 中的补集

$$\complement_U A=\{x\in U\mid \neg(x\in A)\}=\{x\in U\mid x\notin A\}.$$

注　一般把如何由 p 的真假判定 $\neg p$ 的真假总结成表Ⅲ.

表Ⅲ

p	$\neg p$
真	假
假	真

例 1 写出下列各命题的非(否定)，并判断其真假：

(1) p：$y=\tan x$ 是奇函数；

(2) q：$\sqrt{(-2)^2}=-2$；

(3) r：抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点是$(1, 0)$.

解：(1) $\neg p$：$y=\tan x$ 不是奇函数；(假)

(2) $\neg q$：$\sqrt{(-2)^2}\neq-2$，即

$$\neg q:\ \sqrt{(-2)^2}>-2 \text{ 或 } \sqrt{(-2)^2}<-2；\text{(真)}$$

(3) $\neg r$：抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点不是$(1, 0)$. (假)

下面，我们来研究如何对含有量词的全称命题和存在性命题进行否定.

先看含有一个变量的存在性命题如何加以否定. 例如，

p：有些三角形是直角三角形.

这是一个存在性命题，用符号可以表示为

$\exists x\in\{三角形\}$，x 是直角三角形.

这个命题的否定应该是“没有一个三角形是直角三角形”，也就是说

“所有的三角形都不是直角三角形”.

这样，可以用符号表示为

$\neg p$：$\forall x\in\{三角形\}$，x 不是直角三角形.

一般地，可以得出结论：

存在性命题	p：$\exists x\in A$，$p(x)$.
它的否定是	$\neg p$：$\forall x\in A$，$\neg p(x)$.

再考察含有一个变量的全称命题如何加以否定. 例如，

q：所有的质数都是奇数.

这是一个全称命题，用符号可表示为

$\forall x\in\{质数\}$，x 是奇数.

否定它只要能举出一个“反例”就行了. 因而它的否定就可以表示为

$\neg q$：$\exists x\in\{质数\}$，x 不是奇数.

一般地，可以得出结论：

全称命题	q：$\forall x\in A$，$q(x)$.
它的否定是	$\neg q$：$\exists x\in A$，$\neg q(x)$.

例 2 写出下列命题的非，并判断其真假：

(1) p：$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$；

(2) q：所有的正方形都是矩形；

(3) r：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$；

(4) s：至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$.

解：(1) $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\dfrac{1}{4}<0$.（假）

这是由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ 恒成立.

(2) $\neg q$：至少存在一个正方形不是矩形.（假）

(3) $\neg r$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$.（真）

这是由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1>0$ 恒成立.

(4) $\neg s$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3+1\neq 0$.（假）

这是由于 $x=-1$ 时，$x^3+1=0$.

我们已经学习了“且”“或”“非”三个主要的逻辑联结词. 这三个联结词同样可用来联结含有变量的语句. 在用联结词联结含有变量的语句时，得到的新语句一般仍为含有变量的语句，它的真假要根据语句中变量的取值来确定. 例如：

(1) $x=2$ 或 $x=3$；

(2) $x+y=9$ 且 $x-y=-1$.

对于(1)，x 至少取 2，3 中的一个值时，语句表达才是真的，而 x 取其他任何值(1)都是假的；

对于(2)，只有 x 取值 4，且 y 取值 5 时，语句表达才是真的，而 x，y 取其他任何值时，语句(2)都是假的.

含有变量的语句，通常称为开句或条件命题.

练习A

1. 写出下列命题的非，并判断其真假：

(1) 2 是方程 $x^2-4=0$ 的根；　　(2) $\pi=3.141\,5$.

2. 设集合 $M=\{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. 写出下列各命题的非，并判断其真假：

(1) $\forall n\in M$，$n<12$；　　(2) $\exists m\in\{\text{奇数}\}$，$m\in M$.

3. 写出下列各命题的非，并判断其真假：

(1) 一切分数都是有理数；　　(2) 有些三角形是锐角三角形；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+x=x+2$；　　(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，$2x+4\geqslant 0$.

练习B

1. 写出下列命题的非，并判断其真假：

(1) 2是质数；　　(2) 圆周率 π 是无理数；

(3) $1\ 000<100$.

2. 某足球队队员的全体构成集合 A，写出下列命题的非：

(1) A 中的队员至少有一个是北京人；　　(2) A 中的队员都是北京人；

(3) A 中的队员都不是北京人；　　(4) A 中的队员不都是北京人.

3. 写出下列命题的非，并判断它们的真假：

(1) 任意实数 x，都是方程 $3x-5=0$ 的根；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2=1$；

(4) $\exists x\in\mathbf{R}$，是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根.

4. 举反例说明下列命题是假命题：

(1) $\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，方程 $ax=b$ 都有唯一解；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|=x$；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x^2}=x$.

习题1-2 A

1. 把下列各组命题，分别用“且”和“或”联结成新命题，并判断其真假：

(1) p：2不是奇数，　　q：2是质数；

(2) p：$y=2^x$ 是单调函数，　　q：$y=2^x$ 是递增函数；

(3) p：$100>10$，　　q：$10>100$；

(4) p：数列$\{3n+2\}$是等差数列，　　q：数列$\{3n+2\}$是等比数列.

2. 分析下列命题的组成，并用“$\land$”或“$\lor$”表示出来：

(1) $x+1$ 是 x^3+x^2-x-1 与 x^3+1 的公因式；

(2) 方程 $x^2=1$ 的一个解是 $x_1=1$，另一个解是 $x_2=-1$；

(3) ±1 是方程 $x^3+x^2-x-1=0$ 的根.

3. 写出下列命题的非：

(1) 正数的对数都是正数；

(2) 点$(3, 4)$不在圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 上；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$3x=2x+x$；

(4) $\exists x\in\mathbf{N}$，$x^2=x+2$.

4. 设集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，写出下列各命题的非：

(1) $\forall n\in M$，$n>1$；

(2) $\exists n$ 是质数，$n\in M$.

习题 1-2 B

1. 已知 p：$\triangle ABC$ 是直角三角形，q：$\triangle ABC$ 是等腰三角形，试用日常语言表述下列逻辑联结式：

(1) $\neg p$；　　(2) $\neg q$；

(3) $p\wedge q$；　　(4) $p\vee q$.

2. 写出下列命题的非：

(1) 存在一个三角形是直角三角形；

(2) 至少有一个锐角 α，使 $\sin\alpha=0$；

(3) 在实数范围内，有一些一元二次方程无解；

(4) 不是每一个人都会开车.

1.3 充分条件、必要条件与命题的四种形式

1.3.1 推出与充分条件、必要条件

在数学和日常语言中，我们经常遇到“如果 p，则（那么）q”形式的命题，其中 p 称为命题的条件，q 称为命题的结论.

有些命题的真假，要通过推理证明来断定. 经过证明为真的命题，在数学中常称为定理.

我们知道，当命题“如果 p，则 q”经过推理证明断定是真命题时，我们就说由 p 可以推出 q，记作

$$p \Rightarrow q,$$

读作“p 推出 q”.

如果 p 可推出 q，则称

p 是 q 的**充分条件**；q 是 p 的**必要条件**.

这就告诉我们，

命题“如果 p，则 q”真；

$p \Rightarrow q$；

p 是 q 的充分条件；

q 是 p 的必要条件.

这四种形式的表达，讲的是同一个逻辑关系，只是说法不同而已.

下面我们再举例说明.

（1）命题“如果 $x=-y$，则 $x^2=y^2$”是真命题；

$x=-y \Rightarrow x^2=y^2$；

$x=-y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件；

$x^2=y^2$ 是 $x=-y$ 的必要条件.

以上不同形式的叙述，表达的都是同一个逻辑关系.

（2）命题“若 $A \cap B \neq \varnothing$，则 $A \neq \varnothing$”是真命题；

$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \neq \varnothing$；

$A \cap B \neq \varnothing$ 是 $A \neq \varnothing$ 的充分条件；

$A \neq \varnothing$ 是 $A \cap B \neq \varnothing$ 的必要条件.

以上不同形式的叙述，表达了同一个意义的逻辑关系.

（3）平面几何中学习过的定理：“在三角形中，等角对等边”，以及它的逆定理：“在三角形中，等边对等角”，就是说：

命题"在$\triangle ABC$中，如果$\angle B=\angle C$，则$AC=AB$"是真命题；

在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C \Rightarrow AC=AB$；

在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$是$AC=AB$的充分条件；

在$\triangle ABC$中，$AC=AB$是$\angle B=\angle C$的必要条件.

以上叙述同样表达了意义相同的逻辑关系.

同时，我们还知道，命题"在$\triangle ABC$中，如果$AB=AC$，则$\angle B=\angle C$"也是真命题. 这就是说，$\angle B=\angle C$不仅是$AB=AC$的充分条件，也是$AB=AC$的必要条件.

一般地，如果$p \Rightarrow q$，且$q \Rightarrow p$，则称p是q的**充分且必要条件**，简称p是q的**充要条件**，记作

$$p \Leftrightarrow q.$$

显然，当p是q的充要条件时，q也是p的充要条件.

p是q的充要条件，又常说成

q当且仅当p，或p与q等价.

例如：

(1) 如果一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的判别式$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$，则这个方程有实数根；反之，如果一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有实数根，则$\Delta\geqslant 0$. 由于这两个命题都是真命题，所以这两个命题合起来可用充要条件表述为

方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有实数根的充要条件是$\Delta\geqslant 0$.

(2) 在$\triangle ABC$中，如果$\angle C=90^\circ$，则$AC^2+BC^2=AB^2$；反之如果$AC^2+BC^2=AB^2$，则$\angle C=90^\circ$. 由于这两个命题都是真命题，所以这两个命题合起来可用充要条件表述为

在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$的充分必要条件是$AC^2+BC^2=AB^2$.

(3) 如果四边形是平行四边形，则它的一组对边平行且相等；反之，如果四边形的一组对边平行且相等，则这个四边形是平行四边形. 由于这两个命题都是真命题，所以这两个命题合起来可用充要条件表述为

一个四边形是平行四边形的充要条件是它的一组对边平行且相等.

例1 在下列各题中，试判定p是q的什么条件：

(1) p：两三角形全等， q：两三角形面积相等；

(2) p：$a^2=4$， q：$a=2$；

(3) p：$A\subseteq B$， q：$A\cap B=A$.

解：(1) 因为命题"如果两三角形全等，则两三角形面积相等"为真，而"如果两三角形面积相等，则两三角形全等"为假，所以p是q的充分条件，但不是必要条件；

(2) 因为命题"如果$a^2=4$，则$a=2$"为假，而"如果$a=2$，则$a^2=4$"为真，所以p是q的必要条件，但不是充分条件；

(3) 因为命题"如果$A\subseteq B$，则$A\cap B=A$"为真，并且"如果$A\cap B=A$，则$A\subseteq B$"也为真，所以p是q的充要条件.

例2 设$A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$且$A\subseteq B$（图1-3）. 在下列各题中，试确定r是s的什么条件，s是r的什么条件：

(1) r：$x\in A$，　　　s：x 具有性质 $p(x)$；

(2) r：$x\in A$，　　　s：$x\in B$；

(3) r：$A\subseteq B$，　　　s：$x\in A\Rightarrow x\in B$.

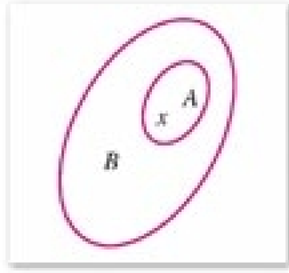


图 1-3

解：(1) 由集合特征性质的定义可知：

$x\in A$ 与 x 具有性质 $p(x)$，可互相推出.

因此，r 是 s 的充要条件；s 也是 r 的充要条件.

(2) 因为 $A\subseteq B$，所以"如果 $x\in A$，则 $x\in B$"为真.

因此，r 是 s 的充分条件；s 是 r 的必要条件.

(3) $A\subseteq B$ 与 $x\in A\Rightarrow x\in B$，可互相推出.

因此，r 是 s 的充要条件；s 也是 r 的充要条件.

练习A

1. 判断下列命题的真假，真命题用符号"$\Rightarrow$"或"$\Leftrightarrow$"表示出来：

(1) 平行四边形的一组对边相等；

(2) 当且仅当整数 n 被 2 除余 1 时，n 为奇数；

(3) 设 x，y 为实数，如果 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$，则 $x=y=0$；

(4) 如果 a，b，c 成等差数列，则 $2b=a+c$.

2. 分别用充分条件和必要条件或充要条件叙述下列真命题：

(1) 设 x，y 为实数，如果 $x^2+y^2=0$，则 $x=0$，且 $y=0$；

(2) 如果四边形的一组对边平行且相等，则这个四边形是平行四边形；

(3) 如果两个三角形相似，则它们的对应角相等；

(4) 如果 $\angle A=30^\circ$，则 $\sin A=\frac{1}{2}$.

3. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) x 为自然数是 x 为整数的________；

(2) $x>3$ 是 $x>5$ 的________；

(3) $x=3$ 是 $x^2-2x-3=0$ 的________；

(4) $x>5$ 是 $x>3$ 的________；

(5) $x^2-4=0$ 是 $x+2=0$ 的________；

(6) 两个三角形的三边对应相等，是两个三角形全等的________；

(7) $a=0$ 是 $ab=0$ 的________；

(8) $ab=0$ 是 $a=0$ 的________.

练习B

1. 用充分条件、必要条件或充要条件填空：

(1) $A=\varnothing$ 是 $A\cup B=B$ 的________；

(2) $A\subsetneqq B$ 是 $A\cap B=A$ 的________；

(3) $x\in A$ 是 $x\in A\cap B$ 的________；

(4) $x\in A$ 且 $A\subsetneqq B$ 是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 的________.

2. 判断下列命题是不是真命题：

(1) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的必要条件；　　(2) $a=b$ 是 $|a|=|b|$ 的充分条件；

(3) $x-2=0$ 是 $x^2-4=0$ 的必要条件；

(4) $x+2=0$ 是 $x^2-4=0$ 的充要条件；

(5) $a>b$ 是 $a^3>b^3$ 的充分条件；

(6) $a>b$ 是 $a^3>b^3$ 的必要条件；

(7) 今天为星期一是明天为星期二的充要条件；

(8) 两个三角形的两组对应角分别相等是两个三角形相似的充要条件.

1.3.2 命题的四种形式

命题"如果 p，则（那么）q"是由条件 p 和结论 q 组成的，对 p，q 进行"换位"和"换质"后，一共可以构成四种不同形式的命题.

(1) **原命题**：如果 p，则 q；

(2) 条件和结论"换位"得

如果 q，则 p，

这称为原命题的**逆命题**；

(3) 条件和结论"换质"(分别否定)得

如果非 p，则非 q，

这称为原命题的**否命题**；

(4) 条件和结论"换位"又"换质"得

如果非 q，则非 p，

这称为原命题的**逆否命题**.

可以看出，原命题"如果 p，则 q"和它的逆命题"如果 q，则 p"是互逆的命题. 同样，否命题"如果非 p，则非 q"和逆否命题"如果非 q，则非 p"也是互逆命题；

命题"如果 p，则 q"与"如果非 p，则非 q"，"如果 q，则 p"与"如果非 q，则非 p"分别是互否的命题；

命题“如果 p，则 q”与“如果非 q，则非 p”，“如果 q，则 p”与“如果非 p，则非 q”分别都是互为逆否的命题（图 1-4）.

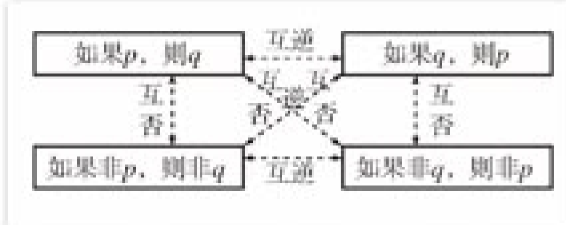


图 1-4

例 试写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断其真假：

（1）$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，如果 $xy=0$，则 $x=0$；

（2）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为向量，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

解：（1）原命题为“$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，如果 $xy=0$，则$x=0$”；（假）

逆命题为“$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，如果 $x=0$，则 $xy=0$”；（真）

否命题为“$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，如果 $xy\neq0$，则 $x\neq0$”；（真）

逆否命题为“$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，如果 $x\neq0$，则 $xy\neq0$”；（假）

（2）原命题为“如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$”；（真）

逆命题为“如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”；（真）

否命题为“如果 $\boldsymbol{a}$ 不垂直于 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq0$”；（真）

逆否命题为“如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq0$，则 $\boldsymbol{a}$ 不垂直于 $\boldsymbol{b}$”.（真）

由以上例题可以发现：原命题与它的逆命题、原命题与它的否命题真假之间的关系是不定的，而原命题与它的逆否命题(它的逆命题与它的否命题)之间在真假值上是始终保持一致的：同真或同假.

一般来说，命题“如果 p，则 q”的四种形式之间有如下关系：

（1）互为逆否的两个命题等价(同真或同假). 因此，要证明原命题也可以只证明它的逆否命题.

（2）互逆或互否的两个命题不等价.

练习A

写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判定其真假：

（1）$\forall n\in\mathbf{N}$，若 n 是完全平方数，则$\sqrt{n}\in\mathbf{N}$；

（2）$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，如果 $a=b$，则 $a^2=ab$；

（3）$\forall x$，$q\in\mathbf{R}$，如果 $q>0$，则 $x^2+x-q=0$ 有实根；

（4）$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，如果 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$；

（5）如果四边形是菱形，则它的对角线互相垂直.

练习B

写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判定其真假：

(1) 如果四边形是平行四边形，那么它的一组对边平行且相等；

(2) 设 $x\in\mathbf{R}$，如果 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线；

(3) 如果一个函数是偶函数，则它的图象关于 y 轴成轴对称图形；

(4) 如果一个函数是奇函数，则它的图象关于坐标原点成中心对称图形.

习题1-3 A

1. 试判断 p 是 q 的什么条件（充分条件、必要条件或充要条件）：

(1) p：a 能被 3 整除，　　q：a 能被 6 整除；

(2) p：$x^2=y^2(x,\ y\in\mathbf{R})$，　　q：$x=y$；

(3) p：两条对角线相等的四边形，　　q：等腰梯形；

(4) p：m，n 均为偶数，　　q：mn 为偶数.

2. 改用充分条件和必要条件或充要条件叙述下列真命题：

(1) 如果 $ab\neq0$，则 $a\neq0$；

(2) 如果 $(x+1)(y-2)=0$，则 $x=-1$ 或 $y=2$；

(3) 如果 $\alpha=45^\circ$，则 $\tan\alpha=1$；

(4) 如果集合 $A=\varnothing$，则集合 $A\cup B=B$.

3. 判断下列表达是否正确．如果不正确，请改正过来：

(1)“n 是自然数”是“n 是整数”的必要条件；

(2)“x 是实数”是“x 是有理数”的充分条件；

(3)“$x^2>9$”是“$x>3$”的充分条件但不是必要条件；

(4)“m，n 都是奇数”的充要条件是“$m+n$ 是偶数”；

(5)“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件；

(6)“$a>b$”是“$|a|>|b|$”的必要条件.

4. 用 $p\Leftrightarrow q$(等价)的形式，表示下列数学概念的定义：

(1) 等比数列；　　(2) 交集；　　(3) 直线与平面垂直.

5. 写出下列各命题的否命题、逆命题、逆否命题，并判断其真假：

(1) 如果 $b^2-4ac>0$，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个不相等的实数根；

(2) 如果 $x-y=0$，则 $(x-y)(x+y)=0$.

6. 写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题：

(1) 如果 $x=3$ 或 $x=7$，则 $(x-3)(x-7)=0$；

(2) 如果 a，b 都是奇数，则 ab 必是奇数.

习题 1-3 B

1. 用“充分”“必要”“充要”填空：

(1) 集合 $A=\varnothing$ 是 $A\cap B=\varnothing$ 的________条件；

(2) $A\cap B=A$ 是 $A\subseteq B$ 的________条件；

(3) $x\in A\cap B$ 是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 的________条件；

(4) $x\in A\cup B$ 是 $x\in A$ 或 $x\in B$ 的________条件.

2. 在下列各题中，p 是 q 的什么条件？

(1) p：$(a>0)\wedge(b>0)$，　　q：$ab>0$；

(2) p：$(x=1)\vee(x=-3)$，　　q：$x^2+2x-3=0$；

(3) p：$a^2-b^2=0$，　　q：$a=b$；

(4) p：四边形 $ABCD$ 是正方形，　　q：$AC\perp BD$.

3. 用充分条件和必要条件或充要条件改写下列命题的叙述：

(1) 设集合 $A=\{x \mid p\}$，$B=\{x \mid q\}$，如果 $A\subseteq B$，则 $p\Rightarrow q$；

(2) 如果平面四边形是菱形，则它的四边相等；

(3) 如果圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 过原点，则 $a^2+b^2=r^2$；

(4) $\forall x$，$y\in\mathbf{N}$，如果 $\sqrt{x}+|y|=0$，则 $(x=0)\wedge(y=0)$.

4. 判断下列命题的真假：

(1) $a>0$ 是 $a^2>0$ 的充要条件；

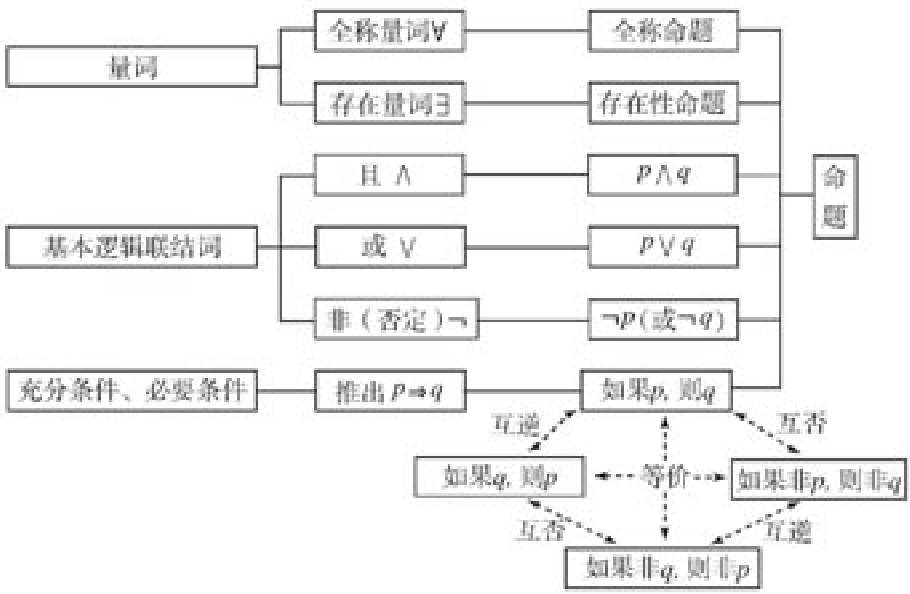
(2) $\triangle ABC$ 中，当且仅当 $a^2+b^2=c^2$ 时，$\angle C=90°$；

(3) 方程 $ax+b=0$，当且仅当 $a\neq0$ 时有唯一解；

(4) $A\cup B=B$ 的充要条件是 $A\subseteq B$.

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 举例说明什么叫做命题.

2. 举例说明什么是全称量词，什么叫做全称命题.

3. 举例说明什么是存在量词，什么叫做存在性命题.

4. 用符号表达一个全称命题和一个存在性命题，并判定它们各自的真假.

5. 分别说明逻辑联结词“且”“或”“非”的意义和符号.

6. 说出推出关系 $p\Rightarrow q$ 的等价叙述.

7. 对于命题“如果 p，则 q”，说明什么是它的逆命题、否命题和逆否命题，并说明它们之间有什么逻辑关系.

8. 举例说明什么是命题的否定，它与否命题有什么不同.

III 巩固与提高

1. 判断下列命题的真假：

(1) 如果 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$； ( )

(2) $3\in\{1,\ 5,\ 3,\ 7\}$； ( )

(3) $\{a\}\in\{a,\ b,\ c,\ d\}$； ( )

(4) $\{a,\ b,\ c\}\subseteq\{a,\ b,\ c\}$； ( )

(5) $\varnothing=\{0\}$； ( )

(6) $\varnothing\subsetneqq\{0\}$； ( )

(7) $\{1,\ 2\}$ 的所有子集是$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,\ 2\}$； ( )

(8) $\{a,\ b,\ c,\ d\}=\{b,\ a,\ d,\ c\}$； ( )

(9) $\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,\ 3\}$； ( )

(10) $A\cup B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$； ( )

(11) $A\cap B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$； ( )

(12) $A\cap B\subseteq A$，且 $A\cap B\subseteq B$； ( )

(13) 如果 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$； ( )

(14) $A\cap B=B\cap A$，且 $A\cup B=B\cup A$； ( )

(15) 如果 $x^2-3x+2=0$，则 $x=2$，且 $x=1$； ( )

(16) $2+2=4$，且 $3+2=6$； ( )

(17) $3+6=9$，或 $3+6=8$； ( )

(18) 如果 $x<2$，则 $x<3$； ( )

(19) $x=3$ 是 $x^2+2x-15=0$ 的充要条件； ( )

(20) $x,\ y,\ z\in\mathbf{R}$，$x=0$，且 $y=0$，且 $z=0$ 是 $x^2+y^2+z^2=0$ 的充要条件. ( )

2. 写出下列命题的非：

(1) 北京大学的所有学生都是中国公民；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>-1$；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+1=0$.

3. 在下列命题中，哪些具有“推出”关系？

(1) 如果两条直线平行，那么内错角相等；

(2) 如果$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，那么$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$；

(3) 设 α，β 是锐角，如果 $\alpha+\beta=90^\circ$，那么 $\sin\alpha=\cos\beta$；

(4) 如果一个数 x 能被 3 整除，那么数 $x+3$ 也能被 3 整除.

4. 举反例说明下列命题是假的：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x>0$；

(2) 如果 $x<2$，则 $x<1$.

5. 用逻辑符号$\land$，$\lor$，$\neg$，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$和量词符号$\forall$，$\exists$把下列命题表示出来：

(1) $x=1$ 或 $x=3$ 是 $x^2-4x+3=0$ 的充要条件；

(2) $x=5$ 是 $x^2=25$ 的充分条件；

(3) $x\in A\cap B$ 当且仅当 $x\in A$ 且 $x\in B$；

(4) $x\in\mathbf{Z}$ 或 $x\in\mathbf{Q}$ 是 $x\in\mathbf{R}$ 的充分条件；

(5) 有一个正整数，既是质数，又是偶数；

(6) 任意一个整数，或者是奇数或者是偶数；

(7) 没有一个整数 a，使 $a^2+1=0$ 成立；

(8) 如果两个集合 A，B 至少有一个公共元素，则它们的交集不空.

6. 写出命题“如果直线 l 垂直于平面 α 内的两条相交直线，则直线 l 垂直于平面 α”的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

Ⅳ 自测与评估

1. 判断下列语句中，哪些是命题：

(1) $7>2$；　　(2) 0 是最小的自然数；

(3) $\sqrt{2}$是无理数吗？　　(4) $\forall x\in\mathbf{R}$，$(x+1)^2\geqslant 0$；

(5) 每个向量都有方向；　　(6) $x+2=0$.

2. 判断下列命题的真假：

(1) $5\geqslant 5$；

(2) 菱形的对角线垂直且互相平分；

(3) $\varnothing\subseteq\{0\}$或$\{1\}\in\{1, 2\}$；

(4) $\varnothing\subseteq\{0\}$且$\{1\}\in\{1, 2\}$；

(5) $\{1\}\notin\{1, 2\}$.

3. 设命题 p：π 是无理数，q：$\sqrt{5}$不是有理数，写出命题$p\wedge q$，$p\vee q$ 和 $\neg p$，并判断这些命题的真假.

4. 写出命题“如果 $a^2+2ab+b^2+a+b-2\neq 0$，那么$a+b\neq 1$”的逆命题、否命题和逆否命题.

5. 指出下列各题中，p 是 q 的什么条件，q 又是 p 的什么条件：

(1) p：$x=y$，　　q：$x^2=y^2$；

(2) p：$x^2+y^2=0$，　　q：$xy=0$；

(3) p：$\alpha+\beta=0$，　　q：$\sin(\alpha+\beta)=0$.

6. 如果一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ $(a\neq 0)$ 至少有一个负的实数根，确定这个结论成立的充要条件.

7. 写出下列命题的非，并判断真假：

(1) 正方形都是菱形；

(2) $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $4x-3>x$；

(3) $\forall x \in \mathbf{R}$，$x+1=2x$.

8. 举反例说明下列各命题是假的：

(1) $\forall a \in \mathbf{R}$，函数 $y=a^x$ 是单调函数；

(2) $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+2x-3 \geqslant 0$；

(3) $\forall x \in \mathbf{R}$，如果 $x>2^{10}$，那么 $x>2^{100}$.

9. 举例说明下列各命题的正确性：

(1) $\exists x \in \mathbf{R}$，$x^2+2x-3=0$；

(2) $\exists x \in \{$四边形$\}$，$x \in \{$菱形$\}$且 $x \in \{$矩形$\}$；

(3) 存在既是奇函数又是偶函数的函数.

10. 写出命题"如果直线 a 垂直于平面 α，则 a 与平面 α 内任意直线都垂直"的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

数　学　文　化

阅读与欣赏

什么是数理逻辑

数理逻辑是用数学方法研究推理过程的科学．所谓数学方法就是用一套表意符号（即有确定意义的人工符号语言）表达思维规律与逻辑结构的方法．

三百多年前，德国数学家莱布尼兹就想发明一种语言符号用作推理，他认为逻辑语言就是用一些表意符号去分别代表一些简单的概念，然后用符号的各种不同组合来表达思维．继莱布尼兹后对数理逻辑作出重大贡献的是英国数学家布尔，他指出逻辑学应像代数那样，能够借助一些有确定意义的符号按照一定的运算法则进行演算，从而把思维规律的研究转化为符号运算规律的研究．布尔成功地定义了“逻辑加法”和“逻辑乘法”．例如，在本章中给定了两个命题，就可用联结词“或”“且”分别构造出新的命题．用“或”联结两个命题通常就叫做“逻辑加”，用“且”联结两个命题通常叫做“逻辑乘”，并且容易验证这些“逻辑加法”和“逻辑乘法”满足交换律、结合律和分配律，这样就把逻辑中语言推理转化为代数运算．应用数学方法研究逻辑，使数学的应用大大地扩大，所谓“数学在生物学和社会学中的应用等于零”的说法就完全不成立了．现代数理逻辑在数学、计算机科学、自动化控制、哲学、语言学、经济学等科学中有着广泛的应用．

同学们学点数理逻辑知识是完全必要的．这有助于提高我们的逻辑思维能力，为我们今后能正确使用数学语言打下基础．应当指出，近代数学语言已有了显著的变化，集合和数理逻辑语言已成了数学表述的通用语言．十多年来，数理逻辑在我国大学、中学已逐步普及．如果你不懂得一点数理逻辑知识，你就很难读懂数学书了．

现代数理逻辑的发展异常迅速，已取得了许多重大成果．数理逻辑基础知识一般包括：集合代数、命题代数和谓词演算等部分．

第二章 圆锥曲线与方程

我们知道，古希腊的几何学家对几何学作出过杰出的贡献，他们不仅对平面图形以及柱、锥、球进行过详细的研究，而且还对许多曲线进行过研究，并且取得杰出的成果，如获得椭圆、双曲线和抛物线等各种曲线的特征性质.

古希腊的几何学家用平面去截一个圆锥面，当平面与圆锥面的轴线所成的角 α 变化时，获得不同的截线（图 2-1）.

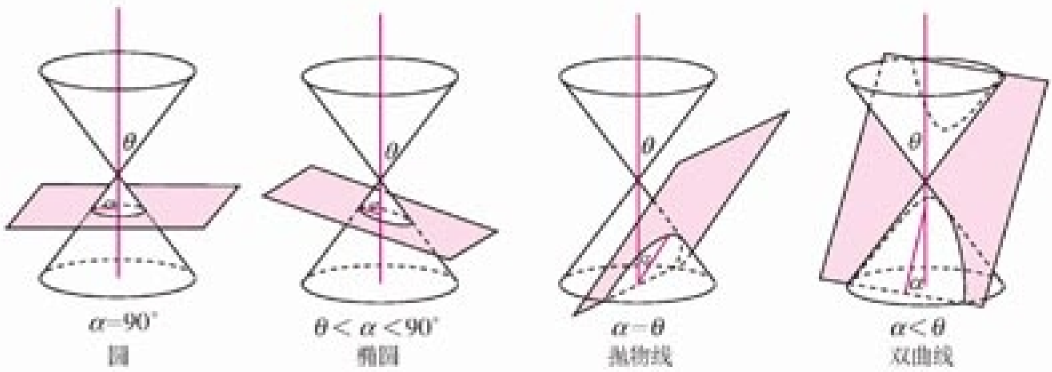


图 2-1

设圆锥面的轴线与母线的夹角为 θ，轴线与轴线在平面内正投影的夹角为 α，则

（1）当轴线垂直于平面时，截线是一个圆；

（2）当 $\theta<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，截线叫做椭圆；

（3）当 $\alpha=\theta$ 时，截线叫做抛物线；

（4）当 $0<\alpha<\theta$ 且平面不过圆锥面的顶点时，截线叫做双曲线.

人们通常把上述曲线叫做**圆锥曲线**.

圆锥曲线在数学和其他科学技术领域中，有着大量的应用. 向太空发射人造地球卫星，机器制造、建筑以及各种工程建设中都需要应用圆锥曲线的性质.

在数学 2“平面解析几何初步”一章的学习中，我们已经指出用数字表示点和用方程表示曲线的重要意义. 用坐标方法研究曲线，可以充分有效地使用现代的计算机技术. 这一章，我们将用坐标方法来讨论圆锥曲线的性质.

2.1 曲线与方程

2.1.1 曲线与方程的概念

通过数学2“平面解析几何初步”一章的学习，我们初步掌握了在直角坐标系中确定直线和圆的方程，并用方程研究直线和圆的几何性质的方法．我们称这种研究几何的方法为**坐标法**．现在我们以此为基础，进一步明确曲线与方程的概念．

用坐标法研究图形性质的基本思路是，借助于坐标系，把点与坐标、曲线与方程联系起来，从而达到形与数的结合；再通过方程对曲线的几何性质进行研究，把几何问题转化为代数问题来解决．

让我们先回顾一下圆及其方程的意义．

如图2-2，以点O为圆心，半径为$r(r>0)$的圆，记作$\odot(O, r)$．以O为原点建立直角坐标系xOy，我们可以得到圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2. \quad ①$$

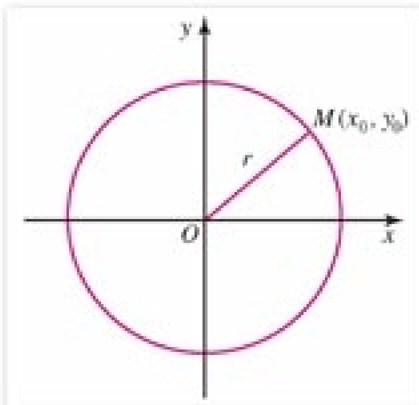


图2-2

上述圆的方程表示的意义是：

(1) 设$M(x_0, y_0)$是$\odot(O, r)$上任意一点，则它到圆心O的距离等于r，因而满足方程$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=r$，即$x_0^2+y_0^2=r^2$，这就是说，(x_0, y_0)是方程①的解；如果点(x_0, y_0)不在$\odot(O, r)$上，则必有$\sqrt{x_0^2+y_0^2}\neq r$，即有$x_0^2+y_0^2\neq r^2$，(x_0, y_0)就不会是方程①的解．

(2) 如果(x_0, y_0)是方程①的解，则可以推得$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=r$，即点$M(x_0, y_0)$到圆心O的距离等于r，点M在$\odot(O, r)$上；如果(x_0, y_0)不是方程①的解，则可以推出$\sqrt{x_0^2+y_0^2}\neq r$，即点$M(x_0, y_0)$不在$\odot(O, r)$上．

以上两点说明了$\odot(O, r)$上的点与方程$x^2+y^2=r^2$的解之间有一一对应关系．

我们知道，$\odot(O, r)$可以看成是一个动点M运动的轨迹．于是在坐标平面上，当$\odot(O, r)$上一个动点M沿该圆周运动时，点M的坐标(x, y)随着点M的运动而变化，点M运动的轨迹可以用方程$x^2+y^2=r^2$来表达．

一般地，一条曲线可以看成动点依某种条件运动的轨迹，所以曲线的方程又常称为满足某种条件的点的**轨迹方程**．

一个二元方程总可以通过移项写成$F(x, y)=0$的形式，其中$F(x, y)$是关于x，y的解析式．例如，$y=x^2$可以写成$x^2-y=0$．

在平面直角坐标系中，如果曲线C与方程$F(x, y)=0$之间具有如下关系：

（1）曲线 C 上点的坐标都是方程 $F(x, y)=0$ 的解；

（2）以方程 $F(x, y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上.

那么，曲线 C 叫做**方程 $F(x, y)=0$ 的曲线**，方程 $F(x, y)=0$ 叫做**曲线 C 的方程**.

这就是说，如果曲线 C 的方程是 $F(x, y)=0$，则

$$M(x, y)\in C \Leftrightarrow F(x, y)=0.$$

因此，方程 $F(x, y)=0$ 可作为描述曲线 C 的特征性质. 曲线 C 用集合的特征性质描述法，可以描述为

$$C=\{M(x, y) \mid F(x, y)=0\}.$$

在坐标系选定以后，曲线被它的方程所唯一确定. 但曲线的方程不是唯一的，除与我们选取的坐标系有关外，在同一坐标系下，还会有同解方程.

由两条曲线的方程，可求出这两条曲线的交点的坐标.

注 在曲线的方程的定义中，曲线上的点与方程的解之间的关系(1)和(2)缺一不可，而且两者是对曲线上的任意一点以及方程的任意一个实数解而言的. 从集合的角度来看，设 A 是曲线 C 上的所有点组成的点集，B 是所有以方程 $F(x, y)=0$ 的实数解为坐标的点组成的点集，则由关系(1)可知 $A\subseteq B$，由关系(2)可知 $B\subseteq A$；同时具有关系(1)和(2)，就有 $A=B$.

已知两条曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为

$$F(x, y)=0, \qquad G(x, y)=0.$$

则交点的坐标必须满足上面的两个方程. 反之，如果 (x_0, y_0) 是上面两个方程的公共解，则以 (x_0, y_0) 为坐标的点必定是两条曲线的交点. 因此，求两条曲线 C_1 和 C_2 的交点坐标，只要求方程组

$$\begin{cases}F(x, y)=0\\G(x, y)=0\end{cases}$$

的实数解就可以得到.

思考与讨论

下面的两个命题正确吗?

（1）到两条坐标轴距离相等的点的轨迹方程是 $y=x$；

（2）如图 2-3，MA 和 MB 分别是动点 $M(x, y)$ 与两定点 $A(-1, 0)$，$B(1, 0)$ 的连线，使 $\angle AMB$ 为直角的动点 M 的轨迹方程是：$x^2+y^2=1$.

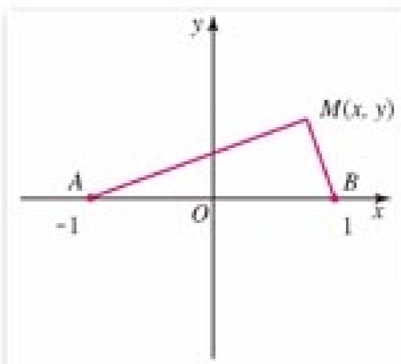


图 2-3

例 已知两圆

$$C_1: x^2+y^2+6x-16=0,$$
$$C_2: x^2+y^2-4x-5=0,$$

求证：对任意不等于-1的实数λ，方程

$$x^2+y^2+6x-16+\lambda(x^2+y^2-4x-5)=0$$

是通过两个已知圆交点的圆的方程(图 2-4).

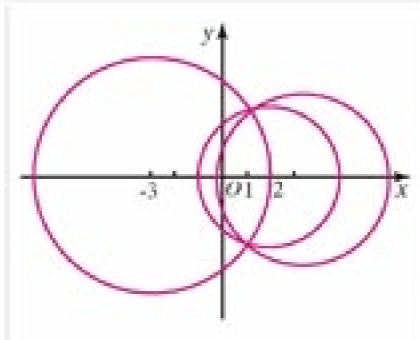


图 2-4

证明：方程

$$x^2+y^2+6x-16+\lambda(x^2+y^2-4x-5)=0$$

可以变形为

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(6-4\lambda)x-16-5\lambda=0,$$

因为$\lambda\neq-1$，得

$$\left(x+\frac{3-2\lambda}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\frac{9\lambda^2+9\lambda+25}{(1+\lambda)^2}. \qquad ①$$

因为方程①中等号右端大于0，所以它是一个圆的方程. 两圆交点的坐标满足两已知圆的方程，当然也满足方程①，因此方程①表示的圆通过两圆的交点.

思考与讨论

在方程①中，如果$\lambda=-1$，那么得到的方程还是圆吗？这个方程表示什么图形？与两个已知圆有什么关系？

练习A

1. 判断点$A(1,1)$，$B(-1,1)$，$C(1,-1)$，$D(-1,-1)$是否在方程
$$x^2+2xy+y^2-4=0$$
的曲线上.
2. 曲线$y=kx+b$经过坐标原点的充要条件是什么？
3. 已知方程$(x+2)^2+(y-3)^2=r^2$的曲线通过点$(-1,5)$，求r^2的值.
4. 求直线$2x+5y-15=0$与曲线$y=-\dfrac{10}{x}$的交点的坐标.

练习B

1. 判断下列各点是否在方程 $4x^2+3y^2=12$ 的曲线上：

   (1) $P(\sqrt{3}, 0)$；　　(2) $Q(-2, 3)$.

2. 以 y 轴为对称轴的等腰三角形，这个三角形底边的中线的方程是 $x=0$ 吗？为什么？

3. 求通过两圆 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2-4x-4y-1=0$ 的交点和点 $(2, 1)$ 的圆的方程.

2.1.2 由曲线求它的方程、由方程研究曲线的性质

在研究直线与圆的方程时，我们已经看到解析几何主要讨论下面的两个基本问题：

(1) 由曲线求它的方程；

(2) 利用方程研究曲线的性质.

下面让我们通过实例，进一步体会如何建立曲线的方程，以及如何利用方程研究曲线的性质.

例 设动点 M 与两条互相垂直的直线的距离的积等于 1，求动点 M 的轨迹方程并用方程研究轨迹（曲线）的性质.

解：(1) 求动点 M 的轨迹方程.

① 建立直角坐标系. 取已知的两条互相垂直的直线为坐标轴，建立平面直角坐标系 xOy，如图 2-5 所示.

② 设动点 M 的坐标为 (x, y).

③ 把几何条件转化为坐标表示.

过点 M 分别作 x 轴，y 轴的垂线，垂足分别为 E，F. 由轨迹上的点 M 与两坐标轴的距离的积等于 1，得

$$点 M 是轨迹上的点 \Leftrightarrow |ME| \cdot |MF|=1.$$

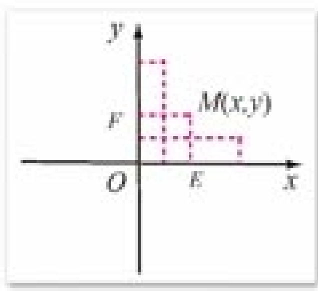


图 2-5

因为点 M 与 x 轴的距离 $|ME|=|y|$，与 y 轴的距离 $|MF|=|x|$，所以上述条件转化为方程表示为

$$|x| \cdot |y|=1.$$

这个方程等价于

$$xy=1 \text{ 或 } xy=-1.$$

这就是说，$M(x, y)$ 在曲线上，则它的坐标满足方程 $|x| \cdot |y|=1$；反之，以方程 $|x| \cdot |y|=1$ 的解为坐标的点 $M(x, y)$ 都在曲线上.

因此，方程

$$|x|\cdot|y|=1$$

为所求动点轨迹的方程.

④ 证明(略).

(2) 利用方程研究曲线的性质.

① 曲线的组成

由于方程$|x|\cdot|y|=1$等价于下列两个方程$xy=1$或$xy=-1$，每一个方程都表示一条曲线，由此可知表示方程的曲线由上述两个方程表示的曲线组成.

② 曲线与坐标轴的交点

由方程$|x|\cdot|y|=1$可推知$x\neq0$且$y\neq0$，因此方程的曲线与两条坐标轴没有交点.方程对应的曲线被两条坐标轴分开.

③ 曲线的对称性质

在方程$|x|\cdot|y|=1$中，以$-x$代替x，这个方程并未改变，因此方程的图象关于y轴对称；

在方程$|x|\cdot|y|=1$中，以$-y$代替y，这个方程也未改变，因此方程的图象关于x轴对称；

在方程$|x|\cdot|y|=1$中，以$-x$代替x，同时以$-y$代替y，这个方程也未改变，因此方程的图象关于原点中心对称.

由以上分析可知，这个方程所表示的曲线，既是轴对称图形又是中心对称图形. 因此我们在研究方程的曲线时，只要研究它在第一象限的那一部分曲线即可.

④ 曲线的变化情况

由曲线的对称性质，我们只考虑第一象限的情况($x>0$，$y>0$). 由方程可知，当变量x逐渐变大时，变量y的值逐渐变小，曲线无限地靠近x轴；当变量x逐渐变小时，变量y的值逐渐增大，曲线无限向上无限地靠近y轴.

⑤ 画出方程的曲线

列表：

x	…	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
y	…	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…

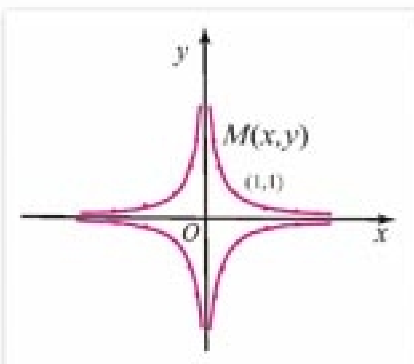


图 2-6

由以上对方程的分析和列表，可以画出方程的曲线在第一象限那一部分；再根据曲线的对称性，可以画出方程所表示的整个曲线，如图 2-6 所示.

练习A

1. 到 x 轴的距离等于 2 的点所组成的直线的方程是 $y=2$ 吗？为什么？
2. 求与 y 轴的距离等于 4 的点的轨迹方程.
3. 已知点 M 与 x 轴的距离和它与点 $F(0, 4)$ 的距离相等，求点 M 的轨迹方程，并根据方程研究曲线的对称性质.

练习B

1. 已知点 $B(-2, 1)$ 和点 $C(3, 2)$，直角三角形 ABC 以 BC 为斜边，求直角顶点 A 的轨迹方程.
2. 已知点 M 与两条互相垂直的直线的距离的平方和等于常数 $k(k>0)$，求点 M 的轨迹的方程，并根据方程研究曲线的性质.
3. 已知两个定点 A，B 的距离为 6，动点 M 满足条件 $\overrightarrow{MA}\cdot 2\overrightarrow{MB}=-1$，求点 M 的轨迹方程.

习题2-1 A

1. 写出圆心在坐标原点、半径是 5 的圆的方程，并判断坐标分别为 $(-4, -3)$，$(7, -3\sqrt{2})$，$(2, 4)$ 和 $(5\cos\theta, 5\sin\theta)$ 的四点是否在这个圆上.
2. 已知两平行直线 l_1：$2x-y+4=0$，l_2：$2x-y-2=0$，到直线 l_1 和 l_2 的距离相等的点的轨迹是直线 l. 直线 l 的方程是 $2x-y+1=0$ 吗？为什么？
3. 求与点 $O(0, 0)$ 和 $A(8, 0)$ 的距离的平方差等于 8 的点的轨迹方程.
4. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(4, 2)$，$B(3, 5)$，$AB=AC$. 求点 C 的轨迹方程.

习题2-1 B

1. 已知一个三角形的三个顶点是 $A(2, 3)$，$B(0, 0)$，$C(4, 0)$. 它的 BC 边上的中线 AM 的方程是 $x=2$ 吗？为什么？
2. 如果方程 $ax^2+by^2=4$ 的曲线通过点 $A(0, -2)$ 和点 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$，试确定 a，b 的值.
3. 求直线 l：$x+4y+7=0$ 与曲线 C：$4x-y^2=0$ 的公共点的坐标.

2.2 椭 圆

2.2.1 椭圆的标准方程

椭圆是常见的图形．例如，汽车油罐横截面的轮廓；天体中一些行星和卫星运行的轨道．又如在圆柱形的玻璃杯中盛半杯水，将杯体倾斜一个角度，水面的边界是椭圆；灯光斜照在圆形桌面上，地面上的影子也是椭圆形．

在画板上取两个定点 F_1 和 F_2，把一条长度为定值且大于 $|F_1F_2|$ 的细绳的两端固定在 F_1，F_2 两点（如图 2-7）．用铅笔尖把细绳拉紧，并使笔尖在画板上慢慢移动一周，画出的图形是一个椭圆．

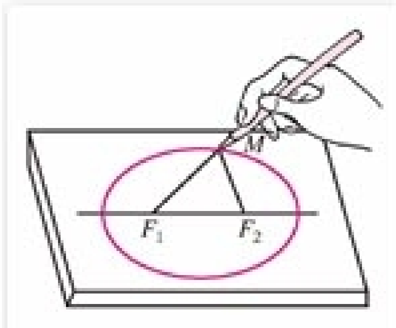


图 2-7

从上面的画图过程，我们可以得出椭圆的定义：

平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹（或集合）叫做**椭圆**．这两个定点叫做**椭圆的焦点**，两焦点的距离叫做**椭圆的焦距**．

现在我们根据椭圆的定义来求椭圆的方程．

设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c$，椭圆上任意一点与 F_1，F_2 的距离的和等于常数 $2a$，其中 $a>c>0$．

以过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，如图 2-8 所示．这时，焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c, 0)$，$(c, 0)$．

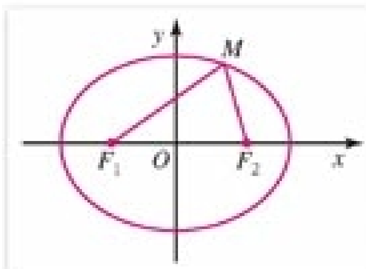


图 2-8

设 $M(x, y)$ 是椭圆上的任意一点，根据椭圆的定义可知，点 M 在椭圆上的充分必要条件是

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

因为 $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，所以上述条件转化为坐标表示，就是

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad ①$$

当 $x\neq 0$ 时，$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\neq\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，由①得

$$\frac{(x+c)^2+y^2-[(x-c)^2+y^2]}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=2a,$$

整理得

$$\frac{2cx}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=a,$$

即

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2c}{a}x. \quad ②$$

①+②，整理得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x. \quad ③$$

将③式平方，再整理得

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2. \quad ④$$

因为 $a>c>0$，所以 $a^2-c^2>0$.

设 $a^2-c^2=b^2$，$b>0$，则④式化为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).} \quad ⑤$$

当 $x=0$ 时，$|MF_1|=|MF_2|=a$. 由 $\sqrt{c^2+y^2}=a$，得 $y^2=a^2-c^2=b^2$，点 M 的坐标为 $(0，\pm b)$，此时 M 的坐标适合⑤.

因此，方程⑤是给定的椭圆的方程. 通常把这个方程叫做**椭圆的标准方程**. 焦点是 $F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，且 $c^2=a^2-b^2$.

思考与讨论

如果椭圆的焦点在 y 轴上，焦点是 $F_1(0，-c)$，$F_2(0，c)$（图 2-9），只要将方程⑤的 x，y 互换，就可以得到它的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$

其中 $b^2=a^2-c^2$. 这个方程也是椭圆的标准方程，想一想，为什么？

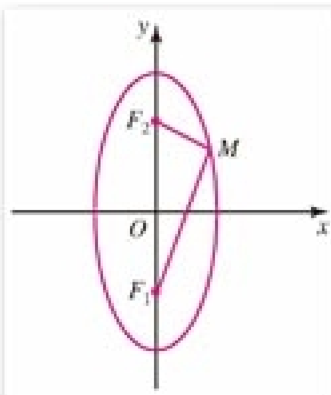


图 2-9

例 1　求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 两个焦点的坐标分别是 $(-3，0)$，$(3，0)$，椭圆上一点 P 与两焦点的距离的和等于 8；

(2) 两个焦点的坐标分别为 $(0，-4)$，$(0，4)$，并且椭圆经过点 $(\sqrt{3}，-\sqrt{5})$.

解：(1) 椭圆的焦点在 x 轴上，设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知，得 $2a=8$，即 $a=4$.

又因为 $c=3$，所以

$$b^2=a^2-c^2=4^2-3^2=7.$$

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1.$$

（2）椭圆的焦点在 y 轴上，设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知，得 $c=4$.

因为 $c^2=a^2-b^2$，所以 $a^2=b^2+16$. ①

因为点$(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$在椭圆上，所以

$$\frac{(-\sqrt{5})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1，即\frac{5}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1. \quad ②$$

将①式代入②，得

$$\frac{5}{b^2+16}+\frac{3}{b^2}=1,$$

解得 $b^2=4$（$b^2=-12$ 舍去）.

由①得 $a^2=4+16=20$.

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1.$$

注 本例用待定系数法求出了椭圆的标准方程．要注意焦点在 x 轴上的椭圆与焦点在 y 轴上的椭圆，其标准方程有不同的形式．

注 解题(2)时，也可以根据椭圆的定义，由点$(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$与焦点 F_1，F_2 的距离的和等于 $2a$，求出 a 的值；然后由 $b^2=a^2-c^2$，确定 b^2 的值．请同学们试一试．

例 2 求下列方程表示的椭圆的焦点坐标：

（1）$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{24}=1$；　　（2）$8x^2+3y^2=24$.

解：（1）已知方程就是椭圆的标准方程，由 $36>24$，可知这个椭圆的焦点在 x 轴上，且 $a^2=36$，$b^2=24$．得

$$c^2=a^2-b^2=36-24=12，c=2\sqrt{3}.$$

因此，椭圆的焦点坐标为$(-2\sqrt{3}, 0)$，$(2\sqrt{3}, 0)$.

（2）把已知椭圆的方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1.$$

由 $8>3$，可知这个椭圆的焦点在 y 轴上，且 $a^2=8$，$b^2=3$，得

$$c^2=a^2-b^2=8-3=5，c=\sqrt{5}.$$

因此，椭圆的焦点坐标为$(0, -\sqrt{5})$，$(0, \sqrt{5})$.

例 3 已知 B，C 是两个定点，$|BC|=8$，且 $\triangle ABC$ 的周长等于 18，求这个三角形的顶点 A 的轨迹方程.

分析：由 $\triangle ABC$ 的周长等于 18，$|BC|=8$，可知点 A 到 B，C 两个定点的距离之和总

是等于10，因此点A的轨迹是以B，C为焦点的椭圆，但点A与点B，C不能在同一直线上．适当建立平面直角坐标系，可以求出这个椭圆的标准方程．

解：以过B，C两点的直线为x轴，线段BC的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系xOy，如图2-10所示．

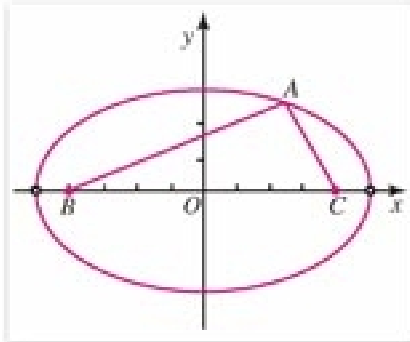


图2-10

由$|BC|=8$，可知点$B(-4,0)$，$C(4,0)$．

由$|AB|+|AC|+|BC|=18$，得$|AB|+|AC|=10$，因此，点A的轨迹是以B，C为焦点的椭圆，这个椭圆上的点与两焦点的距离之和$2a=10$，但点A不在x轴上．

由$a=5$，$c=4$，得$b^2=a^2-c^2=25-16=9$．

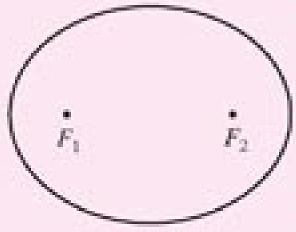
因此点A的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\ (y\neq 0).$$

想一想，能否说点A的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$．

练习A

1．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．作一个三角形，使它的一个顶点为焦点$F_1$，另两个顶点$D$，$E$在椭圆上且边$DE$过焦点$F_2$．试问所画的$\triangle F_1DE$的周长是一个定值吗？如果是定值，这个定值是多少？



（第1题）

2．根据下列条件，求椭圆的标准方程：

（1）$a=\sqrt{3}$，$b=1$，焦点在x轴上；

（2）$b=3$，经过点$(0,-4)$，焦点在y轴上；

（3）焦点坐标为$(-5,0)$和$(5,0)$，椭圆上一点与两焦点的距离的和是26；

（4）焦点坐标为$(0,2\sqrt{3})$和$(0,-2\sqrt{3})$，且经过点$(-\sqrt{6},\sqrt{5})$．

3．设M是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上一点，$F_1$，$F_2$是椭圆的焦点．如果点$M$与焦点$F_1$的距离为4，那么点$M$与焦点$F_2$的距离是多少？

4．求下列方程表示的椭圆的焦点坐标：

（1）$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{12}=1$；　　　（2）$2x^2+4y^2=1$．

练习B

1. 已知椭圆的两个焦点分别为 $F_1(-4, 0)$ 和 $F_2(4, 0)$，再添加什么条件，可得这个椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$？
2. 已知点 $B(6, 0)$ 和 $C(-6, 0)$，过点 B 的直线 l 与过点 C 的直线 m 相交于点 A，设直线 l 的斜率为 k_1，直线 m 的斜率为 k_2. 如果 $k_1 \cdot k_2=-\frac{4}{9}$，求点 A 的轨迹方程，并说明此轨迹是何种曲线.

2.2.2 椭圆的几何性质

已知椭圆 C 的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b>0), \qquad ①$$

我们利用方程①来研究椭圆的一些几何性质.

1. 范围

由方程①可得，椭圆 C 上任意一点的坐标 (x, y) 都适合不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即

$$-a\leqslant x\leqslant a,\ -b\leqslant y\leqslant b.$$

这说明，椭圆 C 位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 围成的矩形内(如图 2-11).

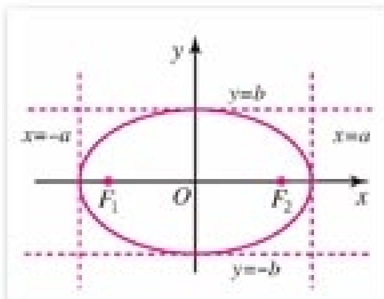


图 2-11

2. 对称性

在方程①中，把 x 换成 $-x$，这个方程不变. 可知如果 $M_1(x, y)$ 是椭圆 C 上任意一点，则与点 M_1 关于 y 轴对称的点 $M_2(-x, y)$ 也在椭圆 C 上，即这个椭圆关于 y 轴对称. 同样地，把 y 换成 $-y$，或把 x 和 y 同时相应换成 $-x$ 和 $-y$，方程①都不变，可知这个椭圆关于 x 轴对称，又关于坐标原点对称.

因此椭圆 C 既是分别以 y 轴，x 轴为对称轴的轴对称图形，又是以坐标原点为对称中心的中心对称图形. 椭圆的对称中心叫做**椭圆的中心**.

3. 顶点

在方程①中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，可知椭圆 C 与 x 轴有两个交点，分别是 $A_1(-a,0)$ 和 $A_2(a,0)$；如果令 $x=0$，则得 $y=\pm b$，可知椭圆 C 与 y 轴也有两个交点，分别是 $B_1(0,-b)$ 和 $B_2(0,b)$.

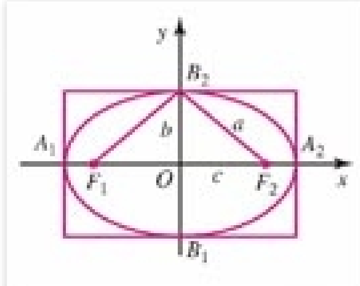


图 2-12

因此，椭圆 C 与它的对称轴共有四个交点，即 A_1，A_2 和 B_1，B_2（如图 2-12），这四个点叫做**椭圆的顶点**.

在 $a>b>0$ 的条件下，线段 A_1A_2 叫做**椭圆的长轴**，它的长等于 $2a$；线段 B_1B_2 叫做**椭圆的短轴**，它的长等于 $2b$. 显然，椭圆的两个焦点在它的长轴上.

于是，在椭圆的方程①中，a，b 分别是椭圆的长半轴的长和短半轴的长. 又设椭圆的焦距为 $2c$，则 c 是椭圆的半焦距. 由 a，b，c 满足关系式

$$a^2=b^2+c^2,$$

可知长度分别为 a，b，c 的三条线段构成一个直角三角形，长度为 a 的线段是斜边.

图 2-12 中，F_1，F_2 是椭圆的焦点，A_1，A_2，B_1，B_2 是椭圆的顶点. 可知

$$|OA_1|=|OA_2|=a,\ |OB_1|=|OB_2|=b,$$
$$|OF_1|=|OF_2|=c,\ |B_2F_1|=|B_2F_2|=a.$$

因此，直角三角形 F_2OB_2（或 F_1OB_2）直观地显示出 a，b，c 三者之间的关系.

4. 离心率

椭圆的焦距与长轴长的比 $e=\dfrac{c}{a}$ 叫做**椭圆的离心率**.

因为 $a>c>0$，所以 $0<e<1$. e 越趋近于 1，则 c 越趋近于 a，从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 越小，因此椭圆越扁；反之，e 越趋近于 0，c 越趋近于 0，从而 b 越趋近于 a，这时椭圆就越趋近于圆.

如果 $a=b$，则 $c=0$，两个焦点重合，这时椭圆的标准方程就变为圆的方程

$$x^2+y^2=a^2.$$

例 1　求椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 的长轴长、短轴长、焦点坐标、顶点坐标和离心率，并用描点法画出它的图形.

解：把椭圆的方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

可知此椭圆的焦点在 x 轴上，且长半轴长 $a=3$，短半轴长 $b=2$；又得半焦距

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}.$$

因此，椭圆的长轴长 $2a=6$；短轴长 $2b=4$；两个焦点的坐标分别是 $(-\sqrt{5},0)$，$(\sqrt{5},0)$；四个顶点的坐标分别是 $(-3,0)$，$(3,0)$，$(0,-2)$，$(0,2)$；椭圆的离心率

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

为了画此椭圆的图形，将椭圆方程变形为

$$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\ (-3\leqslant x\leqslant 3).$$

由 $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$，可以求出椭圆在第一象限内一些点的坐标 (x,y)，列表如下：

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	2	1.97	1.89	1.73	1.49	1.11	0

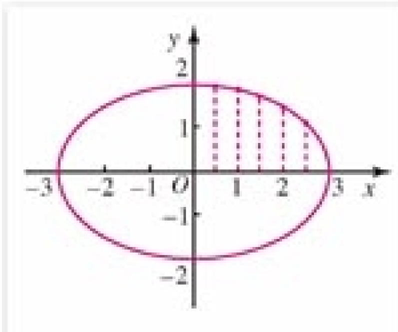


图 2-13

先描点并用光滑曲线顺次连接这些点，得到椭圆在第一象限的图形；再利用椭圆的对称性画出整个椭圆，如图 2-13 所示.

例 2 我国自行研制的“中星 20 号”通信卫星，于 2003 年 11 月 15 日升空精确地进入预定轨道. 这颗卫星的运行轨道，是以地球的中心为一个焦点的椭圆，近地点与地球表面距离为212 km，远地点与地球表面的距离为41 981 km. 已知地球半径约为 6 371 km，求这颗卫星运行轨道的近似方程（长、短半轴长精确到 0.1 km）.

分析：设卫星运行的椭圆形轨道的中心为点 O，地球的中心为点 F，则椭圆的长轴在直线 OF 上，长轴的两个端点分别是轨道上的近地点和远地点. 适当建立平面直角坐标系，可以求得轨道的标准方程.

解：以卫星运行的椭圆形轨道的中心 O 为原点，如图 2-14建立平面直角坐标系，使地球中心 F 在 x 轴上. 点$F(c,0)$是椭圆的一个焦点，椭圆与 x 轴的交点 A，B 分别是近地点和远地点.

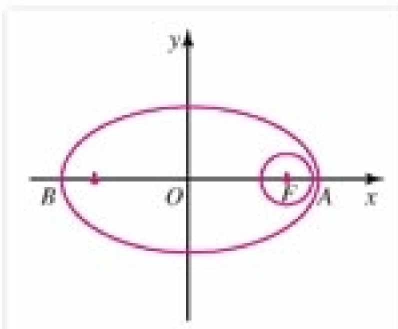


图 2-14

设所求的卫星运行轨道的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

由已知，得

$$a-c=|FA|=6\ 371+212=6\ 583,$$
$$a+c=|FB|=6\ 371+41\ 981=48\ 352.$$

解得

$$\begin{aligned}a&=27\ 467.5,\\ b&=\sqrt{a^2-c^2}\\ &=\sqrt{(a+c)(a-c)}\\ &=\sqrt{48\ 352\times 6\ 583}\end{aligned}$$

$$\approx 17\ 841.0.$$

因此，所求的卫星运行轨道的近似方程为

$$\frac{x^2}{27\ 467.5^2}+\frac{y^2}{17\ 841.0^2}=1.$$

练习A

1. 求下列椭圆的长轴长、短轴长、焦点坐标、顶点坐标和离心率：

(1) $x^2+9y^2=81$；　　(2) $25x^2+9y^2=225$；

(3) $16x^2+y^2=25$；　　(4) $4x^2+5y^2=1$.

2. 根据下列条件，求椭圆的标准方程：

(1) 长轴长和短轴长分别为 8 和 6，焦点在 x 轴上；

(2) 长轴和短轴分别在 y 轴，x 轴上，经过 $P(-2, 0)$，$Q(0, -3)$ 两点；

(3) 一焦点坐标为 $(-3, 0)$，一顶点坐标为 $(0, 5)$；

(4) 两顶点坐标为 $(0, \pm 6)$，且经过点 $(5, 4)$；

(5) 焦距是 12，离心率是 0.6，焦点在 x 轴上.

3. 已知椭圆的一个焦点为 $F(6, 0)$，点 B_1，B_2 是短轴的两端点，$\triangle FB_1B_2$ 是等边三角形，求这个椭圆的标准方程.

练习B

1. 已知椭圆 C 的方程为 $9x^2+4y^2=36$：

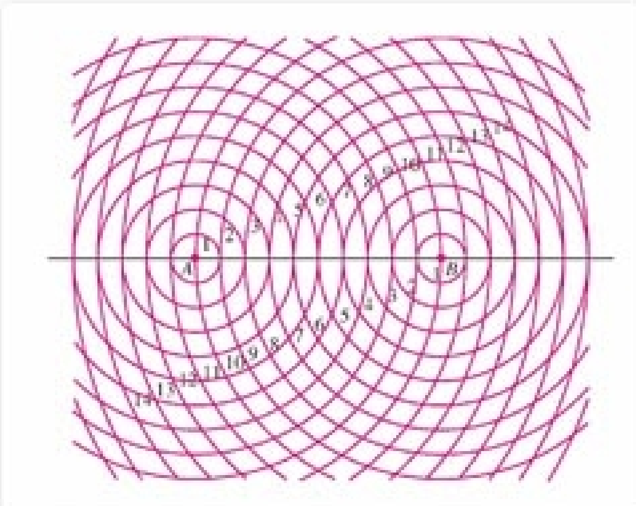
(1) 与椭圆 C 有相同焦点的椭圆有多少个？写出其中两个椭圆的方程；

(2) 与椭圆 C 有相同焦点且经过点 $(4, \sqrt{5})$ 的椭圆有几个？写出符合条件的椭圆的方程.

2. 1970 年 4 月 24 日我国发射的第一颗人造地球卫星，运行的轨道是以地球中心为一个焦点的椭圆，近地点与地球表面相距 439 km，远地点与地球表面相距 2 384 km. 已知地球半径约为 6 371 km，试建立适当的平面直角坐标系，求这颗卫星运行轨道的近似方程（长、短半轴长精确到 0.1 km）.

习题 2-2 A

1. 如图，已知$|AB|=10$(长度单位)，图中的一系列圆是圆心分别为A，B的两组同心圆，每组同心圆的半径分别是1，2，3，…，按照“加1”依次递增．试按照下列步骤，利用这两组同心圆画一个椭圆：



(第1题)

(1) 在两组同心圆的交点中，描出“与A，B两点的距离的和等于14”的交点；

(2) 用光滑的曲线顺次连接所描出的交点．

2. 已知椭圆关于坐标轴对称．根据下列条件，求椭圆的标准方程：

(1) 焦点在x轴上，焦距为2，椭圆上一点M与两焦点的距离的和等于6；

(2) 一个焦点坐标是$(3,0)$，过点$A(-5,0)$；

(3) 焦距为$2\sqrt{15}$，离心率等于$\frac{\sqrt{15}}{4}$；

(4) 长轴长是短轴长的5倍，过点$P(6,2)$．

3. 求下列椭圆的长轴长、短轴长、焦点坐标和顶点坐标：

(1) $\frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $m^2x^2+4m^2y^2=1\ (m>0)$．

4. 已知椭圆$kx^2+5y^2=5$的一个焦点坐标是$(2,0)$，求k的值．

5. 已知F_1，F_2是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的焦点，点$P$在椭圆上且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，求$\triangle F_1PF_2$的面积．

6. 设椭圆的对称轴为坐标轴，短轴的一个端点与两焦点是同一个正三角形的顶点，焦点与椭圆上的点的最短距离为$\sqrt{3}$，求这个椭圆的方程和离心率．

7. 已知椭圆的两个焦点为$F_1(-2\sqrt{2},0)$，$F_2(2\sqrt{2},0)$，过F_1且与坐标轴不平行的直线l与椭圆相交于M，N两点．如果$\triangle MNF_2$的周长等于12，求这个椭圆的方程．

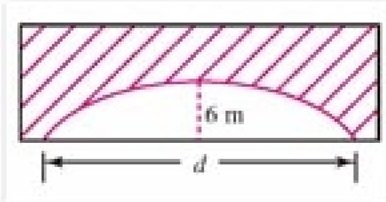
8. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的中心$O$的直线$l$与椭圆相交于$A$，$B$两点，$F_1$，$F_2$是椭圆的焦点：

(1) 求证：四边形AF_1BF_2是平行四边形；

(2) 平行四边形AF_1BF_2的面积是否可能等于ab？并说明理由.

9. 水星运转的轨道是以太阳的中心为一个焦点的椭圆，椭圆上的点离太阳中心最近的距离约为4.7×10^8 km，最远的距离约为7.05×10^8 km. 以这个轨道的中心为原点，以太阳中心和轨道中心所在的直线为x轴，建立直角坐标系，求水星的轨道的方程（保留3位有效数字）.

10. 某隧道的拱线设计为半个椭圆的形状，最大拱高h为6 m（如图所示），路面设计是双向四车道，车道总宽度为22 m. 如果限制通行车辆的高度不超过4.5 m，那么隧道设计的拱宽d至少应是多少米（精确到0.01）？



（第10题）

习题2-2 B

1. 已知方程$(3m+7)x^2+(3m+4)y^2=5m+12$表示的曲线是椭圆，求实数$m$的取值范围.

2. 已知点$A(1, 1)$，而且F_1是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左焦点，$P$是椭圆上任意一点，求$|PF_1|+|PA|$的最小值和最大值.

3. 已知F_1，F_2是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，点$P$在椭圆上. 如果$\triangle PF_1F_2$是直角三角形，求点$P$的坐标.

4. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AB=AC=1$. 如果一个椭圆通过A，B两点，它的一个焦点为点C，另一个焦点在边AB上，求这个椭圆的焦距.

5. 已知P为椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上任意一点，F_1，F_2是椭圆的两个焦点，求：

(1) $|PF_1|\cdot|PF_2|$的最大值；　　(2) $|PF_1|^2+|PF_2|^2$的最小值.

2.3 双曲线

2.3.1 双曲线的标准方程

我们已经知道，平面内与两个定点的距离的和为常数的点的轨迹可能是椭圆，那么与两个定点的距离差为非零常数的点的轨迹可能是怎样的曲线呢？

平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数(小于 $|F_1F_2|$ 且不等于零)的点的轨迹叫做**双曲线**．这两个定点叫做**双曲线的焦点**，两焦点的距离叫做**双曲线的焦距**．

以过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系(图 2-15)．

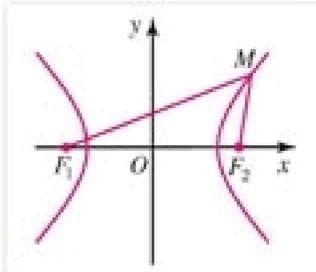


图 2-15

设 $M(x,\ y)$ 是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距是 $2c(c>0)$，那么 F_1，F_2 的坐标分别是 $(-c,\ 0)$，$(c,\ 0)$．又设点 M 与 F_1 和 F_2 的距离的差的绝对值等于常数 $2a(0<a<c)$．则点 M 在双曲线上的充分必要条件是

$$\big||MF_1|-|MF_2|\big|=2a，\text{即}|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

因为 $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，所以上述条件转化为坐标表示，就是

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a, \qquad ①$$

即

$$\frac{2cx}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=\pm a,$$

得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm\frac{2c}{a}x. \qquad ②$$

上面①，②两式中的右边同取“＋”号或同取“－”号．

由①＋②，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right). \qquad ③$$

将③式两边平方，再整理得

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2.$$

因为 $c>a>0$，所以 $c^2-a^2>0$．设 $c^2-a^2=b^2$，$b>0$，则上式化为

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).} \qquad ④$$

因此，方程④是双曲线的方程，通常把这个方程叫做**双曲线的标准方程**. 它所表示的双曲线，两焦点在 x 轴上，焦点坐标分别为 $(-c, 0)$，$(c, 0)$，这里 $c^2=a^2+b^2$.

思考与讨论

如果双曲线的焦点在 y 轴上（图 2-16），焦点是 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，则只要将方程④中的 x，y 互换就可以得到它的方程

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

其中 $b^2=c^2-a^2$. 这个方程也是双曲线的标准方程，想一想为什么.

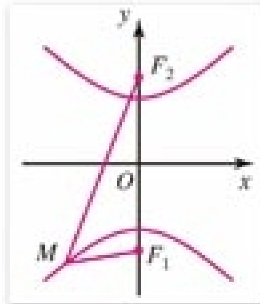


图 2-16

例 1 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 两个焦点的坐标分别是 $(-5, 0)$，$(5, 0)$，双曲线上的点与两焦点的距离之差的绝对值等于 8；

(2) 双曲线的一个焦点坐标是 $(0, -6)$，经过点 $A(-5, 6)$.

解：(1) 由已知，得 $c=5$，$2a=8$，即 $a=4$.

因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9$.

又因为曲线的焦点在 x 轴上，所以所求的双曲线标准方程是

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

(2) 由已知，得 $c=6$，且焦点在 y 轴上，另一焦点坐标是 $(0, 6)$.

因为点 $A(-5, 6)$ 在双曲线上，所以点 A 与两焦点的距离的差的绝对值是常数 $2a$，即

$$2a=\left|\sqrt{(-5)^2+(6+6)^2}-\sqrt{(-5)^2+(6-6)^2}\right|$$
$$=|13-5|=8,$$

得 $a=4$，$b^2=c^2-a^2=6^2-4^2=20$.

因此，所求的双曲线标准方程是

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1.$$

> **注**
> 题 (2) 求解时，也可设双曲线的方程为
> $$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$
> 然后利用已知条件求解.

例 2 相距 2 000 m 的两个哨所 A，B，听到远处传来的炮弹爆炸声. 已知当时的声速是 330 m/s，在 A 哨所听到爆炸声的时间比在 B 哨所听到时迟 4 s，试判断爆炸点在什么样的曲线上，并求出曲线的方程.

分析：爆炸点与哨所 A，B 的“距离差”等于声速乘以两哨所听到爆炸声的“时间差”，且爆炸点距 B 哨所较近.

解：设爆炸点 P，由已知可得

$$|PA|-|PB|=330\times4=1\ 320.$$

因为$|AB|=2\ 000>1\ 320$，又$|PA|>|PB|$，所以点 P 在以A，B 为焦点的双曲线的靠近 B 处的那一支上.

如图 2-17 建立平面直角坐标系，使 A，B 两点在 x 轴上，线段 AB 的中点为坐标原点.

由 $2a=1\ 320$，$2c=2\ 000$，得

$$a=660,\ c=1\ 000,$$

$$b^2=c^2-a^2=564\ 400.$$

因此，点 P 所在曲线的方程是

$$\frac{x^2}{435\ 600}-\frac{y^2}{564\ 400}=1\ (x>0).$$

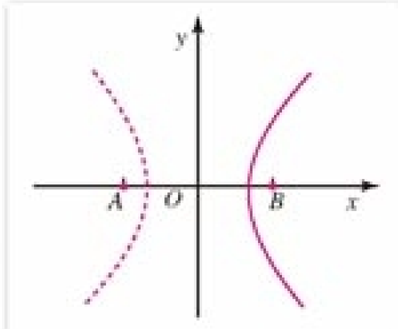


图 2-17

练习A

1. 根据下列条件，求双曲线的标准方程：

（1）$a=3$，$b=4$，焦点在 x 轴上；

（2）焦点为 $F_1(0,\ -6)$和 $F_2(0,\ 6)$，经过点 $A(2,\ -5)$；

（3）焦点在 x 轴上，经过点 $P(4,\ -2)$和点 $Q(2\sqrt{6},\ 2\sqrt{2})$；

（4）$a=5$，$c=7$.

2. 已知双曲线 C 的方程是$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$：

（1）求双曲线 C 的焦点 F_1，F_2 的坐标；

（2）如果双曲线 C 上一点 P 与焦点 F_1 的距离等于 8，求点 P 与焦点 F_2 的距离.

3. 在相距 1 400 m 的 A，B 两个观察站，在 A 站听到炮弹爆炸声的时间比在 B 站听到时早 4 s. 已知当时的声速是340 m/s，求炮弹爆炸点所在曲线的方程.

练习B

1. 双曲线 $3mx^2-my^2=3$ 的一个焦点坐标是$(-2,\ 0)$，求 m 的值.

2. 已知双曲线 $x^2-y^2=m$ 与椭圆 $2x^2+3y^2=72$ 有相同的焦点，求 m 的值.

2.3.2 双曲线的几何性质

我们利用双曲线 C 的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0) \quad ①$$

来研究双曲线的一些几何性质.

1. 范围

由方程①可知，双曲线 C 上任意一点的坐标 $(x,\ y)$ 都适合不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1,$$

即 $x^2\geqslant a^2$，得 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$.

因此双曲线 C 位于两直线 $x=a$ 和 $x=-a$ 所夹平面区域的外侧，如图 2-18 所示.

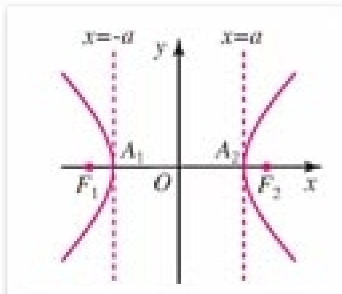


图 2-18

2. 对称性

类似于对椭圆对称性的讨论，可知双曲线 C 是以 x 轴，y 轴为对称轴的轴对称图形；也是以原点为对称中心的中心对称图形．这个对称中心叫做**双曲线的中心**.

3. 顶点

在方程①中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，可知双曲线 C 与 x 轴有两个交点，分别是 $A_1(-a,\ 0)$ 和 $A_2(a,\ 0)$．令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数根，说明双曲线 C 与 y 轴没有公共点.

双曲线与它的对称轴的两个交点叫做**双曲线的顶点**．如图 2-19 所示，双曲线 C 的顶点是 $A_1(-a,\ 0)$，$A_2(a,\ 0)$，这两个顶点是双曲线两支中相距最近的点．线段 A_1A_2 叫做**双曲线的实轴**，它的长等于 $2a$．同时，在 y 轴上作点 $B_1(0,\ -b)$，$B_2(0,\ b)$，线段 B_1B_2 叫做**双曲线的虚轴**，它的长等于 $2b$．相应地，a，b 分别是双曲线的实半轴长和虚半轴长.

4. 渐近线

观察图 2-19 中方程①所表示的双曲线 C．在直线 $x=a$ 的右侧，当 x 逐渐增大时，双曲线的右支向右上和右下逐渐延伸；在直线 $x=-a$ 的左侧，当 x 逐渐减小时，双曲线的左支向左上和左下逐渐延伸.

我们再进一步分析双曲线的这一变化趋势，不妨先考虑它在第一象限内的那一部分，这一部分曲线的方程可表示为

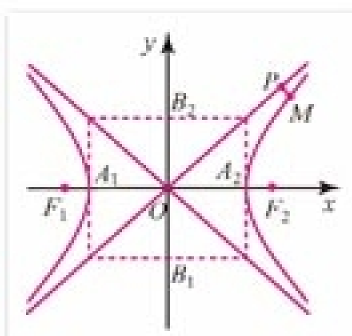


图 2-19

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ (x>a).$$

由于 $x>a>0$，可知$\sqrt{x^2-a^2}<x$；又因为 $b>0$，所以

$$y<\frac{b}{a}x.$$

这说明在第一象限内，双曲线 C 上的任意一点 $M(x,\ y)$总是位于直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的下方.

如图 2-19 所示，过点 M 作直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线 MP，则 M 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离

$$\begin{aligned}|MP|&=\frac{\left|\frac{b}{a}x-y\right|}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\\&=\frac{\left|\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right|}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\\&=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|\\&=\frac{a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.\end{aligned}$$

因为当 $x>a$ 时，$x+\sqrt{x^2-a^2}$随着 x 增大而增大，所以$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$随着 x 增大而减小，可知当 x 越来越大时，$|MP|$越来越接近于 0. 这说明当点 M 以双曲线 C 的顶点 A_2 开始在第一象限沿此双曲线移动，并越来越远离点 A_2 时，点 M 和直线 $y=\frac{b}{a}x$ 就越来越接近.

由此可见，此双曲线右支向右上方无限延伸时，它总在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 下方，且与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 越来越接近，但不会相交.

根据双曲线的对称性可知，双曲线 C 向外无限延伸时，总是局限在由直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 相交而分平面所成的、含双曲线焦点的两个区域内，并与这两条直线无限接近，但永远不会与这两条直线相交，如图 2-19 所示.

直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 叫做**双曲线的渐近线**.

> 注
>
> 双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$.

5. 离心率

双曲线的焦距与实轴的比 $e=\frac{c}{a}$，叫做**双曲线的离心率**. 因为 $c>a>0$，所以双曲线的

离心率 $e>1$.

由等式 $c^2-a^2=b^2$ 可得

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\sqrt{e^2-1}.$$

因此 e 越大，$\frac{b}{a}$ 也越大，即渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大，这时双曲线的形状就从扁狭逐渐变得开阔．由此可知，双曲线的离心率越大，它的开口就越开阔．

例 1 已知双曲线的焦点在 x 轴上，中心在原点，如果焦距为 8，实轴长为 6，求此双曲线的标准方程及其离心率．

解：由已知，得 $2c=8$，$2a=6$，因此

$$c=4,\ a=3,\ b^2=c^2-a^2=4^2-3^2=7.$$

又因为此双曲线的焦点在 x 轴上，因此所求的双曲线标准方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1,$$

离心率是

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}.$$

例 2 求双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的实轴长和虚轴长、顶点坐标、焦点坐标及渐近线方程．

解：把双曲线方程化为标准方程

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

由此可知，实半轴长 $a=3$，虚半轴长 $b=4$．半焦距

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

因此，

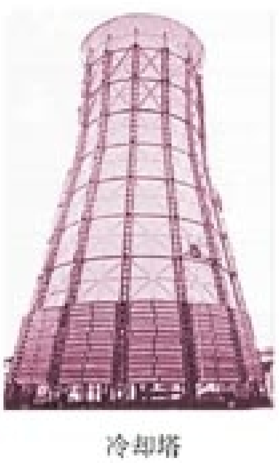
实轴长 $2a=6$，虚轴长 $2b=8$；

顶点的坐标是 $(3,0)$，$(-3,0)$；

焦点的坐标是 $(-5,0)$，$(5,0)$；

渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

例 3 一双曲线型冷却塔的外型，是双曲线的一部分绕其虚轴所在直线旋转所成的曲面(图 2-20(1))，它的最小直径为 24 m，上口直径为 26 m，下口直径为 50 m，高为 55 m．在如图 2-20(2) 所给的平面直角坐标系中，求此双曲线的近似方程(虚半轴长精确到 0.1 m)．



冷却塔

分析：所给直角坐标系的 y 轴是双曲线的虚轴，原点是冷却塔最小圆的圆心，x 轴是这个最小圆的直径所在的直线．可知坐标轴是双曲线的对称轴，最小圆的直径 $A'A$ 的端点 A' 和 A 是双曲线的顶点．

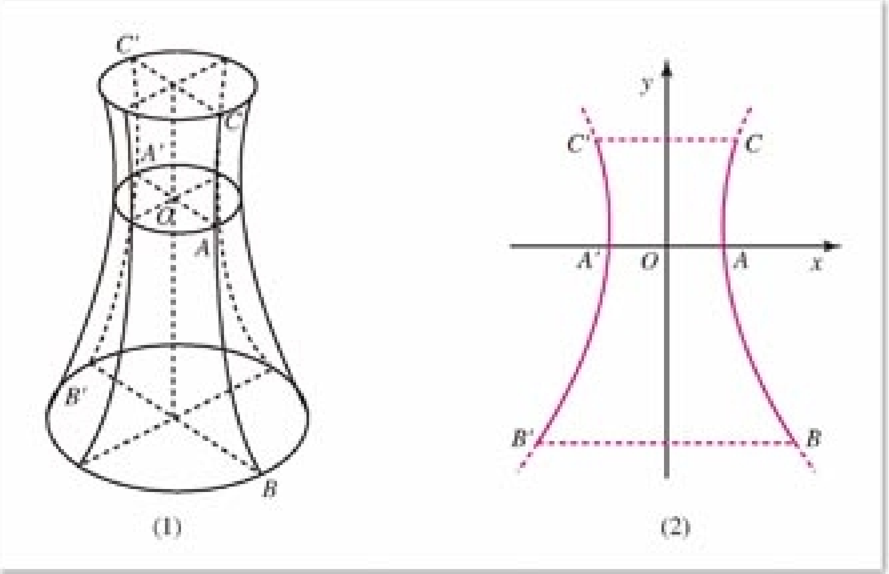


图 2-20

解：在给定的直角坐标系中，设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

由已知冷却塔的最小直径 $A'A=24$ m，上口直径 $C'C=26$ m，下口直径 $B'B=50$ m，可知 $a=12$，点 B，C 的横坐标分别为 25，13.

设 B，C 的纵坐标分别为 y_1，y_2，其中 $y_1<0$，$y_2>0$. 因为$B(25,\ y_1)$，$C(13,\ y_2)$在双曲线上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{25^2}{12^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\\ \dfrac{13^2}{12^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$$

解得

$$y_1=-\frac{b}{12}\sqrt{25^2-12^2}=-\frac{\sqrt{481}}{12}b,$$

$$y_2=\frac{b}{12}\sqrt{13^2-12^2}=\frac{5}{12}b.$$

因为塔高为 55 m，所以 $y_2-y_1=55$，即

$$\frac{5}{12}b+\frac{\sqrt{481}}{12}b=55,$$

解得 $b\approx24.5$.

因此双曲线的近似方程为

$$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{24.5^2}=1.$$

练习A

1. 求下列双曲线的实轴长和虚轴长、焦点坐标、离心率及渐近线方程：

(1) $x^2-y^2=4$；　　(2) $-9x^2+y^2=81$；

(3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$；　　(4) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=4$.

2. 已知双曲线一焦点坐标为(5，0)，一渐近线方程为 $3x-4y=0$，求此双曲线的标准方程和离心率.

3. 求双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$的渐近线方程，并画出此双曲线的图形.

练习B

1. 根据下列条件，求双曲线的标准方程：

(1) 它与双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$有共同的渐近线，且经过点 $A(2\sqrt{3}，-3)$；

(2) 两顶点间的距离是6，两焦点连线被两顶点和中心四等分.

2. 求双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{36}=1$上任意一点 M 到两条渐近线的距离乘积的值. 试把这个结论推广到一般的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

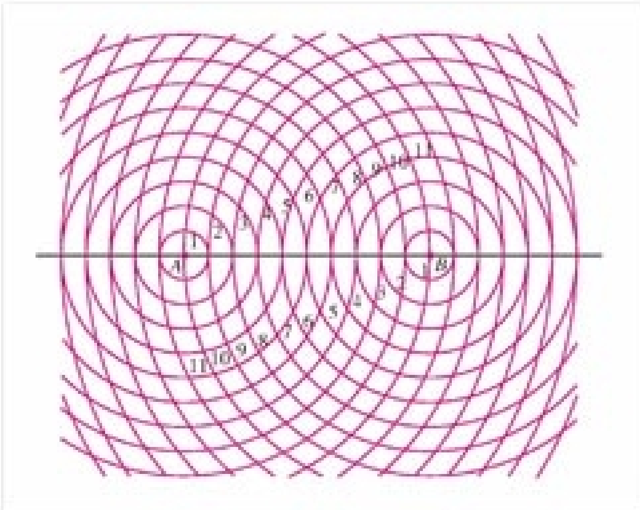
3. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点为 F，焦距为 $2c$，左顶点为 A，虚轴的上端点为 $B(0，b)$，若$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=3ac$，求该双曲线的离心率.

习题2-3 A

1. 如图，利用两组同心圆，按照下述步骤画一条双曲线，使“双曲线上任意一点与 A，B 两点的距离的差的绝对值等于6”：

(1) 描点：用 r_1，r_2 分别表示圆心为 A，B 的圆的半径，找出图中满足 $|r_1-r_2|=6$ 的两圆的交点；

(2) 连接：分别用光滑的曲线顺次连接所描交点中满足 $r_1-r_2=6$ 的点和满足 $r_2-r_1=6$的点，并显示左、右两部分各自向上、下延伸的特征.



（第1题）

2. 根据下列条件，求双曲线的标准方程：

（1）焦点在 x 轴上，实轴长等于8，虚轴长等于2；

（2）焦距为26，且经过点 $M(0, 12)$；

（3）焦点在 x 轴上，焦距为10，双曲线上一点 M 与两焦点的距离的差的绝对值等于6；

（4）焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，$|F_1F_2|=12$，顶点 A_1，A_2 是线段 F_1F_2 的三等分点；

（5）离心率 $e=\sqrt{5}$，过点 $M(4, 4\sqrt{3})$.

3. 已知双曲线 C 的方程是 $4x^2-\frac{4y^2}{3}=1$：

（1）求双曲线 C 的焦点 F_1，F_2 的坐标；

（2）如果双曲线 C 上一点 M 与焦点 F_1 的距离等于它到焦点 F_2 的距离的2倍，求点 M 与焦点 F_1 的距离.

4. 求下列双曲线的实轴长和虚轴长、焦点坐标、顶点坐标及渐近线方程：

（1）$\frac{9x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$；

（2）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1$.

5. 已知直线 l_1：$5x+3y=0$ 和 l_2：$5x-3y=0$：

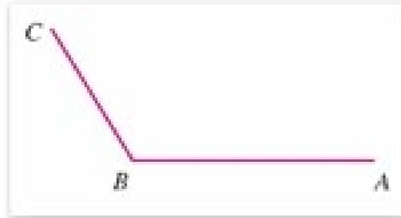
（1）写出两个以直线 l_1 和 l_2 为渐近线的双曲线的标准方程；

（2）如果以直线 l_1 和 l_2 为渐近线的双曲线经过点 $M(1, 3)$，求此双曲线的标准方程.

6. 已知双曲线的两个焦点为 F_1，F_2，虚轴的一个端点为 B，且 $\angle F_1BF_2=\frac{2\pi}{3}$，求此双曲线的离心率.

7. 已知 F_1，F_2 是双曲线 $3x^2-5y^2=15$ 的两个焦点，点 A 在双曲线上，且 $\triangle F_1AF_2$ 的面积等于 $2\sqrt{2}$，求 $\angle F_1AF_2$ 的大小.

8. 如图，A，B，C 是三个观察哨，A 在 B 的正东，两地相距 6 km，C 在 B 的北偏西 30°，两地相距 4 km．在某一时刻，A 观察哨发现某种信号，并知道该信号的传播速度为 1 km/s；4 秒后 B，C 两个观察哨同时发现这种信号．在以过 A，B 两点的直线为 x 轴，以线段 AB 的垂直平分线为 y 轴的平面直角坐标系中，指出发了这种信号的地点 P 的坐标．



（第 8 题）

习题 2-3 B

1. 已知方程$\dfrac{x^2}{m^2-1}+\dfrac{y^2}{m-2}=1$表示焦点在 x 轴上的双曲线，求实数 m 的取值范围．
2. 已知双曲线与椭圆 $4x^2+y^2=64$ 共焦点，双曲线的实轴长与虚轴长之比为$\sqrt{3}:3$，求该双曲线的方程．
3. 已知点 $B(6,0)$和点 $C(-6,0)$，过点 B 的直线 l 与过点 C 的直线 m 相交于点 A，设直线 l 的斜率为 k_1，直线 m 的斜率为 k_2：

    (1) 如果 $k_1\cdot k_2=\dfrac{4}{9}$，求点 A 的轨迹方程，并说明此轨迹是何种曲线．

    (2) 如果 $k_1\cdot k_2=a$，其中 $a\neq0$，求点 A 的轨迹方程，并根据 a 的取值讨论此轨迹是何种曲线．
4. 已知 F_1，F_2 是双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点，点 M 在双曲线上．如果$\overrightarrow{MF_1}\perp\overrightarrow{MF_2}$，求$\triangle MF_1F_2$ 的面积．

2.4 抛物线

2.4.1 抛物线的标准方程

我们在操场上投掷铅球，或者进行排球比赛时向对方抛发球，看到的铅球、排球运行的轨道是抛物线的形象．抛物线是一种常见的曲线，它的应用也很广泛．例如太阳灶、探照灯、雷达天线、射电望远镜等，都是利用抛物线的原理制成的．

在画板上画一条直线 l，使 l 与画板左侧的边线平行；再在直线 l 外画一个定点 F（如图 2-21）．取一把丁字尺靠紧画板左侧外沿，丁字尺和直线 l 垂直相交于点 P，在丁字尺的另一端取一点 Q．将一条长度等于 $|PQ|$ 的细绳，一端固定在点 Q，另一端固定在点 F．用笔尖靠着丁字尺边缘并扣紧细绳，然后上下平移丁字尺，笔尖滑动画出的曲线是部分抛物线．

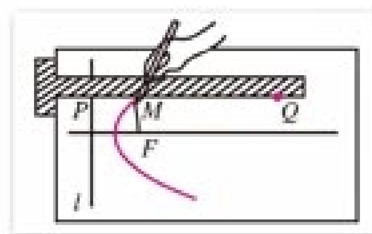


图 2-21

平面内与一个定点 F 和一条定直线 $l(F\notin l)$ 的距离相等的点的轨迹叫做**抛物线**．定点 F 叫做**抛物线的焦点**，定直线 l 叫做**抛物线的准线**．

下面我们根据抛物线的定义来探求它的方程．

过点 F 作直线 l 的垂线，垂足为 K．以直线 KF 为 x 轴，线段 KF 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，如图 2-22 所示．

设 $|KF|=p(p>0)$，则焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$．

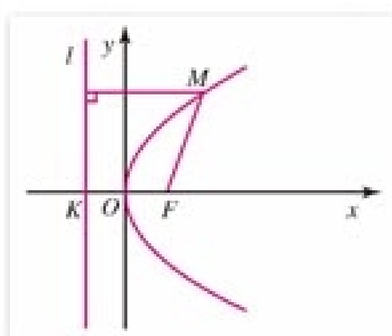


图 2-22

再设 $M(x,\ y)$ 是抛物线上的任意一点，点 M 到直线 l 的距离为 d，由抛物线的定义可知，点 M 在抛物线上的充要条件是

$$|MF|=d.$$

因为 $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$，$d=\left|x+\frac{p}{2}\right|$，所以上述条件转化为坐标表示，就是

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

$$\boxed{y^2=2px\ (p>0).} \qquad ①$$

方程①叫做**抛物线的标准方程**. 它所表示的抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，坐标是 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$；它的准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$，其中 p 是焦点到准线的距离.

例 1　已知抛物线的焦点是 $F(3,\ 0)$，写出它的标准方程和准线方程.

解：因为抛物线的焦点坐标是 $(3,\ 0)$，所以

$$\frac{p}{2}=3,\ 得\ p=6.$$

因此，所求的抛物线标准方程是

$$y^2=12x,$$

准线方程是 $x=-3$.

例 2　已知抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，焦点到准线的距离是 3，求抛物线的标准方程、焦点坐标和准线方程.

解：由已知，得 $p=3$. 因此，所求的抛物线标准方程是

$$y^2=6x;$$

焦点坐标是 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$；准线方程是 $x=-\frac{3}{2}$.

练习A

1. 根据下列条件，写出抛物线的标准方程：

（1）焦点是 $F(2,\ 0)$；

（2）准线方程是 $x=-\frac{3}{2}$.

2. 写出下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$y^2=10x$；　　　　（2）$y^2=ax\ (a>0)$.

3. 求焦点在 x 轴正半轴上，并且经过点 $M(2,\ -4)$ 的抛物线的标准方程.

4. 已知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，且准线与 y 轴之间的距离为 6，求此抛物线的标准方程.

练习B

1. 已知点 M 与点 $F(4, 0)$ 的距离比它到直线 l：$x+6=0$ 的距离小 2，求点 M 的轨迹方程.
2. 已知点 M 在抛物线 $y^2=12x$ 上，它与焦点的距离等于 9，求点 M 的坐标.
3. 已知抛物线 $y^2=6x$ 和点 $A(4, 0)$，点 M 在此抛物线上运动，求点 M 与点 A 的距离的最小值，并指出此时点 M 的坐标.

2.4.2 抛物线的几何性质

我们根据抛物线的标准方程

$$y^2=2px\ (p>0) \quad ①$$

来研究它的一些几何性质.

1. 范围

因为 $p>0$，由方程①可知，这条抛物线上任意一点 M 的坐标 (x, y) 满足不等式 $x \geqslant 0$，所以这条抛物线在 y 轴的右侧；当 x 的值增大时，$|y|$ 也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸，它开口向右.

2. 对称性

以 $-y$ 代 y，方程①不变，因此这条抛物线是以 x 轴为对称轴的轴对称图形. 抛物线的对称轴叫做**抛物线的轴**.

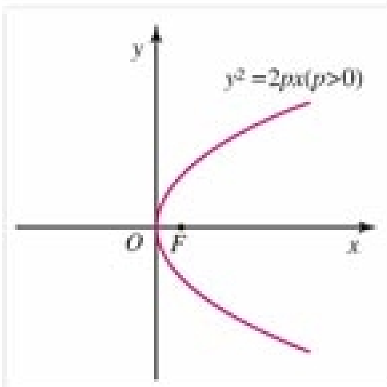


图 2-23

3. 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做**抛物线的顶点**. 在方程①中，当 $y=0$ 时，$x=0$，因此这条抛物线的顶点就是坐标原点.

4. 离心率

抛物线上的点到焦点的距离与到准线的距离的比，叫做**抛物线的离心率**，用 e 表示. 按照抛物线的定义，$e=1$.

例 1 已知抛物线以 x 轴为轴，顶点是坐标原点且开口向右，又抛物线经过点 $M(4, 2\sqrt{3})$，求它的标准方程.

解：根据已知条件，设抛物线的方程为

$$y^2=2px\ (p>0).$$

因为点 $M(4,\ 2\sqrt{3})$ 在抛物线上，所以

$$(2\sqrt{3})^2=2p\cdot 4,$$

得 $2p=3$.

因此，所求方程为

$$y^2=3x.$$

例 2　汽车前灯反射镜与轴截面的交线是抛物线的一部分，灯口所在的圆面与反射镜的轴垂直，灯泡位于抛物线焦点处. 已知灯口的直径是 24 cm，灯深10 cm，那么灯泡与反射镜的顶点(即截得抛物线的顶点)距离是多少？(图 2-24(1))

解：取反射镜的轴即抛物线的轴为 x 轴，抛物线的顶点为坐标原点，建立平面直角坐标系 xOy，如图 2-24(2)所示.

因为灯口直径 $|AB|=24$，灯深 $|OP|=10$，所以点 A 的坐标是(10，12).

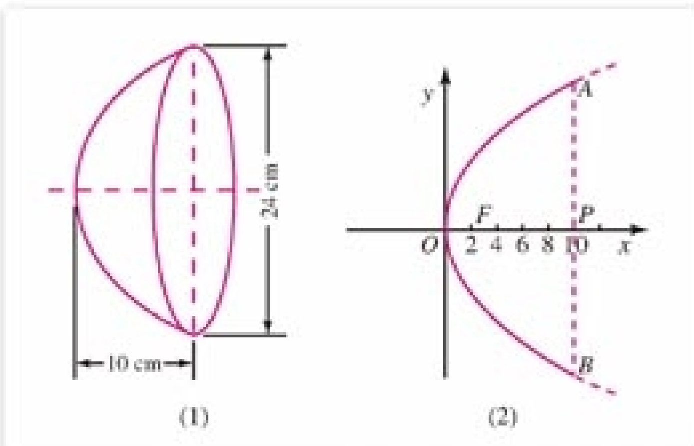


图 2-24

设抛物线的方程为

$$y^2=2px\ (p>0).$$

因为点 $A(10,\ 12)$ 在抛物线上，得

$$12^2=2p\times 10,$$

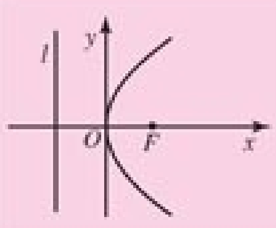
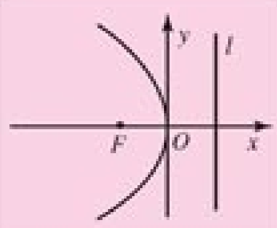
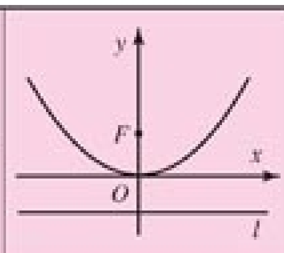
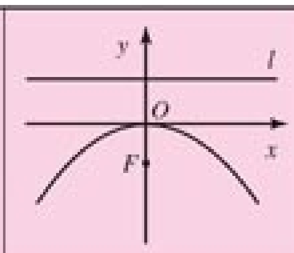
所以 $p=7.2$，抛物线焦点 F 的坐标为

$$(3.6,\ 0).$$

因此灯泡与反射镜顶点的距离是 3.6 cm.

在直角坐标平面上，顶点在原点、轴与坐标轴重合的抛物线有四种位置情况，因此抛物线的方程相应地有四种形式，它们都叫做抛物线的标准方程，它们的推导过程类同.

设抛物线的焦点到准线的距离为 $p(p>0)$，上述抛物线方程的四种形式列表如下：

图形				
标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点	原点			
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$	$\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

例 3 已知点 A 在平行于 y 轴的直线 l 上，且 l 与 x 轴的交点为$(4,\ 0)$．动点 P 满足 $\overrightarrow{AP}$ 平行于 x 轴，且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$，求 P 点的轨迹方程，并说明轨迹的形状．

解：设动点 P 的坐标为$(x,\ y)$，则由已知有 A 的坐标为$(4,\ y)$，所以

$$\overrightarrow{OA}=(4,\ y),\ \overrightarrow{OP}=(x,\ y).$$

因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，因此

$$4x+y^2=0,$$

即 P 的轨迹方程为 $4x+y^2=0$.

轨迹的形状是抛物线.

练习A

1. 求准线为直线 $x=-2$ 的抛物线的标准方程，并画出它的图形.

2. 在同一直角坐标系中画出下列抛物线的图形：

(1) $y^2=\frac{1}{4}x$；　(2) $y^2=x$；　(3) $y^2=4x$.

再比较这些图形，说明抛物线开口的大小与方程中 x 的系数之间的关系.

3. 已知正三角形 AOB 的顶点 A，B 在抛物线 $y^2=6x$ 上，O 是坐标原点．求 $\triangle AOB$ 的边长.

练习B

1. 垂直于 x 轴的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A，B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{3}$．求直线 AB 的方程．
2. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点的一条直线与它交于 P，Q 两点，过点 P 和此抛物线顶点的直线与准线交于点 M．求证直线 MQ 平行于此抛物线的对称轴．
3. 已知抛物线的顶点在坐标原点 O，对称轴为 x 轴，焦点为 F，抛物线上一点 A 的横坐标为 2，且 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{OA}=16$．求此抛物线的方程．

探索与研究

在平面内，求到定点 F 与到定直线 l 的距离比等于常数 e（正数）的动点 M 的轨迹方程：

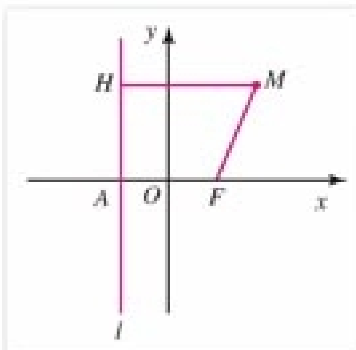


图 2-25

(1) 如图 2-25，作 $FA\perp l$ 于点 A．以直线 AF 为 x 轴，线段 AF 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系 xOy．

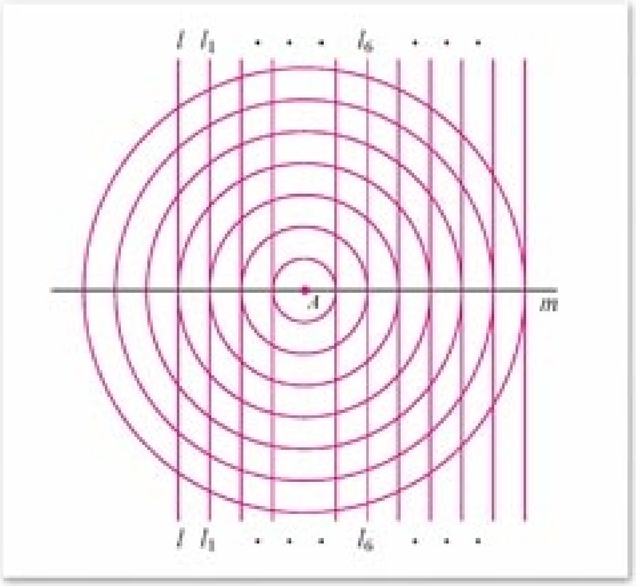
(2) 曲线上点满足的条件：作 MH 垂直于直线 l 于点 H，则动点 M 满足条件 $\dfrac{|MF|}{|MH|}=e$．

(3) 曲线的特征性质转化为坐标表示：设动点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，$OA=d(d>0)$，则点 F 的坐标为 $(d,\ 0)$，直线 l 的方程为 $x=-d$．$MH=|x+d|$．

请把上述条件转化为坐标表示．求出曲线方程后，讨论当 $e<1$，$e>1$，$e=1$ 时动点的轨迹是什么样的图形．

习题 2-4 A

1. 如图，一组同心圆的圆心为点 A，它们的半径 r 分别为 1，2，3，…，按照“加 1”依次递增；一组平行线都与过点 A 的直线 m 垂直，相邻两直线的间距为 1，其中直线 l 在点 A 左侧且与点 A 的距离为 4．参照画椭圆、双曲线的方法和步骤，在图中画一条抛物线，使抛物线上任意一点与点 A 的距离和直线 l 的距离相等．



（第1题）

2. 根据下列条件，求抛物线的方程：

（1）顶点在原点，对称轴为 x 轴，且过点 $A(2,\ -4)$；

（2）顶点在原点，对称轴为坐标轴，且过点 $B(4,\ 2)$.

3. 一个动点到点 $F(0,\ -4)$ 的距离比到直线 $y-3=0$ 的距离多 1，求这个动点的轨迹方程.

4. 求下列方程表示的抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$y^2-6x=0$；　　（2）$x^2+10y=0$；

（3）$y=\dfrac{3}{8}x^2$；　　（4）$ax+y^2=0\ (a\neq 0)$.

5. 抛物线 $y^2=-12x$ 上的一点 P 和焦点 F 的距离等于 9，求点 P 的坐标.

6. 抛物线的顶点是双曲线 $12x^2-9y^2=144$ 的中心，而焦点是此双曲线的左顶点，求抛物线的方程.

7. 已知抛物线的顶点在原点，对称轴为 x 轴，其上一点 $P(-4,\ m)$ 到焦点的距离为 5，求抛物线的方程及 m 的值.

8. 已知抛物线以原点为顶点，以坐标轴为对称轴，焦点在直线 $x-2y+1=0$ 上，求抛物线的方程.

9. 已知点 P 是抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $2x-y-4=0$ 的距离最短的点，求点 P 的坐标.

习题 2-4 B

1. 动点 M 到点 $F(0,\ 2)$ 的距离和到直线 $y=4$ 的距离相等，求动点 M 的轨迹方程.

2. 已知抛物线的对称轴是 y 轴，且它经过直线 $x+y=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y=0$ 的交点，

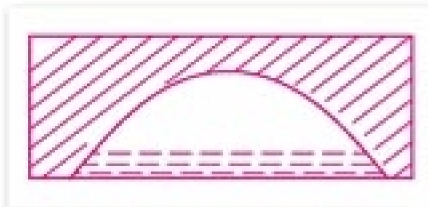
求此抛物线的标准方程.

3. 已知抛物线 $y^2=4x$，P 是抛物线上一点：

(1) 设 F 为焦点，一个定点为 $A(6,3)$，求 $|PA|+|PF|$ 的最小值，并指出此时点 P 的坐标；

(2) 设点 M 的坐标为 $(m,0)$，$m\in\mathbf{R}$，求 $|PM|$ 的最小值(用 m 表示)，并指出此时点 P 的坐标.

4. 如图是一座抛物线型拱桥示意图，桥拱是抛物线部分且以抛物线的轴为对称轴. 已知顶点距水面 4 m 时，量得水面宽 12 m，那么当水位升高 1 m 时水面的宽多少(精确到 0.1 m)?



(第4题)

2.5 直线与圆锥曲线

我们知道，直线与圆的位置关系有相交、相切或相离三种情况，可以分别由直线与圆有两个不同的公共点、有且只有一个公共点或没有公共点来确定．直线与圆的公共点问题，可以转化为它们的方程所组成的方程组求解的问题，从而用代数方法来判断直线与圆的位置关系．现在，我们采用同样的方法来研究直线与椭圆、双曲线、抛物线的位置关系．下面举例说明．

例 1 已知直线 l：$y=2x+m$，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$（图 2-26）．试问当 m 取何值时，直线 l 与椭圆 C：（1）有两个不重合的公共点；（2）有且只有一个公共点；（3）没有公共点？

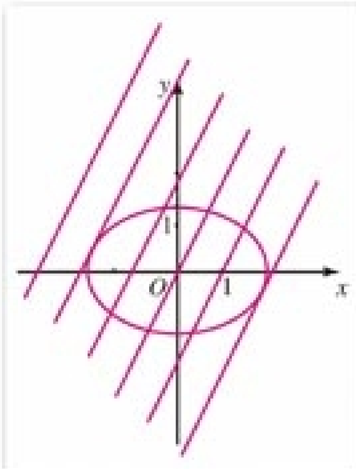


图 2-26

解：直线 l 的方程与椭圆 C 的方程联立，得方程组

$$\begin{cases} y=2x+m & ① \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 & ② \end{cases}$$

将①代入②，整理得

$$9x^2+8mx+2m^2-4=0, \qquad ③$$

这个关于 x 的一元二次方程③的判别式

$$\Delta=(8m)^2-4\times9\times(2m^2-4)=-8m^2+144.$$

（1）由 $\Delta>0$，得 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$.

于是，当 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$ 时，方程③有两个不同的实数根，可知原方程组有两组不同的实数解．这时直线 l 与椭圆 C 有两个不同的公共点．

（2）由 $\Delta=0$，得 $m=\pm3\sqrt{2}$.

也就是当 $m=\pm3\sqrt{2}$ 时，方程③有两个相同的实数根，可知原方程组有两组相同的实数解．这时直线 l 与椭圆 C 有两个互相重合的公共点，即直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点．

> **注**
> 直线与椭圆的公共点个数存在三种可能：有两个不同的公共点，有且只有一个公共点（其实是两个公共点重合为一点），没有公共点；相应地就说直线与椭圆相交，相切，相离．

（3）由 $\Delta<0$，得 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$.

从而当 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$ 时，方程③没有实数根，可知原方程组没有实数解．这时直线 l 与椭圆 C 没有公共点．

例 2 已知点 $A(0,\ 2)$ 和抛物线 C：$y^2=6x$，求过点 A 且与抛物线 C 相切的直线 l 的方程（图 2-27）．

解：当直线 l 的斜率不存在时，由直线 l 过点 $A(0,\ 2)$ 可知，直线 l 就是 y 轴，其方程为 $x=0$.

由

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2=6x \end{cases}$$

得 $y^2=0$. 因此，此时直线 l 与抛物线 C 只有一个公共点 $O(0,\ 0)$，即直线 l 与抛物线 C 相切.

如果直线 l 的斜率存在，则设直线 l 的方程为 $y=kx+2$. 这个方程与抛物线 C 的方程联立，得方程组

$$\begin{cases} y=kx+2 \\ y^2=6x \end{cases}$$

由方程组消去 x，得方程

$$ky^2-6y+12=0. \qquad ①$$

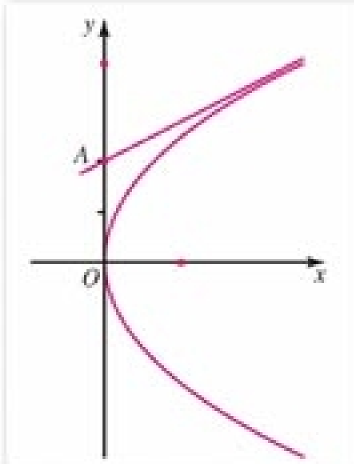


图 2-27

当 $k=0$ 时，得 $-6y+12=0$，可知此时直线 l 与抛物线相交于点 $\left(\frac{2}{3},\ 2\right)$.

当 $k\neq0$ 时，关于 y 的二次方程①的判别式 $\Delta=36-48k$. 由 $\Delta=0$，得 $k=\frac{3}{4}$，可知此时直线 l 与抛物线 C 有两个互相重合的公共点，即它们相切. 直线 l 的方程为

$$y=\frac{3}{4}x+2,$$

即 $3x-4y+8=0$.

因此，直线 l 的方程为 $x=0$，或 $3x-4y+8=0$.

直线与圆锥曲线相交有两个交点时，这条直线上以这两个交点为端点的线段叫做圆锥曲线的弦，线段的长就是弦长. 简单地说，圆锥曲线的弦就是连接圆锥曲线上任意两点所得的线段.

注　在例 2 中所设直线 l 的方程为点斜式，已认定直线的斜率存在，这时要注意直线 l 的斜率不存在的情况.

例 3　已知斜率为 2 的直线经过椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点 F_2，与椭圆相交于 A，B 两点，求弦 AB 的长.

解：椭圆的右焦点 F_2 的坐标为 $(1,\ 0)$，直线 AB 的方程为 $y=2(x-1)$.

由方程组

$$\begin{cases} y=2(x-1) \\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\dfrac{5}{3} \\ y_2=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

因此 $A(0,\ -2)$，$B\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$，从而得弦 AB 的长

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-0\right)^2+\left[\frac{4}{3}-(-2)\right]^2}$$
$$=\frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

例 4 有一椭圆形溜冰场，长轴长 100 m，短轴长60 m. 现要在这溜冰场上划定一个各顶点都在溜冰场边界上的矩形区域，且使这个区域的面积最大，应把这个矩形的顶点定位在何处？这时矩形的周长是多少？

分析：因为椭圆和矩形都是中心对称图形，又矩形的各顶点在椭圆上，所以他们有同一个对称中心. 同时，椭圆关于长轴、短轴分别所在的直线都对称，可知此矩形也关于这两条直线都对称. 因此，以这两条直线建立平面直角坐标系，可利用椭圆的方程及矩形所要满足的条件来解决问题.

解：分别以椭圆的长轴、短轴各自所在的直线为 x 轴和 y 轴，如图 2-28 建立平面直角坐标系 xOy，设矩形$ABCD$的各顶点都在椭圆上.

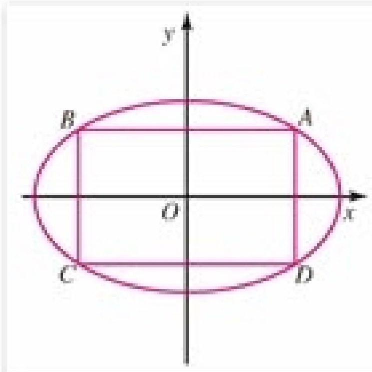


图 2-28

因为矩形的各顶点都在椭圆上，而矩形是中心对称图形，又是以过对称中心且垂直其一边的直线为对称轴的轴对称图形，所以矩形 $ABCD$ 关于原点 O 及 x 轴、y 轴都对称.

已知椭圆的长轴长 $2a=100$(m)，短轴长 $2b=60$(m)，则椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1.$$

设顶点 A 的坐标为$(x_0,\ y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$，则

$$\frac{x_0^2}{50^2}+\frac{y_0^2}{30^2}=1,$$

因此 $y_0^2=\frac{30^2}{50^2}(50^2-x_0^2)$.

根据矩形 $ABCD$ 的对称性，可知它的面积 $S=4x_0y_0$.

由于

$$x_0^2y_0^2=x_0^2\cdot\frac{30^2}{50^2}(50^2-x_0^2)$$
$$=\frac{30^2}{50^2}(-x_0^4+50^2x_0^2)$$
$$=\frac{30^2}{50^2}\left[-\left(x_0^2-\frac{50^2}{2}\right)^2+\frac{50^4}{4}\right],$$

因此，当 $x_0^2=\frac{50^2}{2}$时，$x_0^2y_0^2$ 达到最大值，同时 $S=4x_0y_0$ 也达到最大值. 这时

$$x_0=25\sqrt{2},\ y_0=15\sqrt{2}.$$

矩形 $ABCD$ 的周长为

$$4(x_0+y_0)=4(25\sqrt{2}+15\sqrt{2})=160\sqrt{2}(\mathrm{m}).$$

因此在溜冰场椭圆的短轴两侧分别画一条与短轴平行且与短轴相距$25\sqrt{2}$ m(约35.35 m)的直线，这两条直线与椭圆的交点就是所划定的矩形区域的顶点；这个矩形区域的周长为$160\sqrt{2}$ m，约等于226.27 m.

练习A

1. 已知直线 $y=kx+2$ 和椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，当 k 取何值时，此直线与椭圆：(1) 相交；(2) 相切；(3) 相离？

2. 已知斜率为 2 的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于A，B两点，如果线段AB的长等于5，求直线 l 的方程.

3. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线与这条抛物线相交于A，B两点.求证：这两个交点到 x 轴的距离的乘积是常数.

练习B

1. 已知椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$，弦$AB$的中点是$M(3，1)$，求弦$AB$所在直线的方程.

2. 过抛物线的顶点O作两条互相垂直的弦OA和OB.求证：弦AB与抛物线的对称轴相交于定点.

习题2-5 A

1. 已知 $M(4，2)$是直线 l 被椭圆 $x^2+4y^2=36$ 所截得的线段AB的中点，求直线 l 的方程.

2. 已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，点$A$，$B$分别是它的左，右顶点.一条垂直于 x 轴的动直线 l 与椭圆相交于P，Q两点，又当直线 l 与椭圆相切于点A或点B时，看作P，Q两点重合于点A或点B，求直线AP与直线BQ的交点M的轨迹.

3. 已知直线 $y=x+m$ 与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$相交于A，B两点，当 m 变化时，求$|AB|$的

最大值.

4. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的弦 AB 过它的焦点，直线 AB 的斜率为 2，求弦 AB 的长.

5. 已知直线 $y=ax+1$ 与双曲线 $3x^2-y^2=1$ 相交于 A，B 两点，O 为坐标原点. 如果 OA 与 OB 垂直，求 a 的值.

习题 2-5 B

1. 已知抛物线 C 的顶点在原点，对称轴是 x 轴，它的弦 PQ 所在直线的方程为 $y=2x+1$，弦长等于 $\sqrt{15}$，求抛物线 C 的方程.

2. 已知直线 $y=kx+2$ 与椭圆 $x^2+2y^2=2$ 相交于不同的两点，求 k 的取值范围.

3. 直线 l 过点 $P(2, 4)$ 且与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点，求直线 l 的方程.

4. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线，交抛物线于 A，B 两点，点 A 在 x 轴的上方，求 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值.

5. 已知双曲线 $2x^2-y^2=2$，它的弦 PQ 的长是实轴长的 2 倍，如果弦 PQ 所在的直线 l 过点 $A(\sqrt{3}, 0)$，求直线 l 的方程.

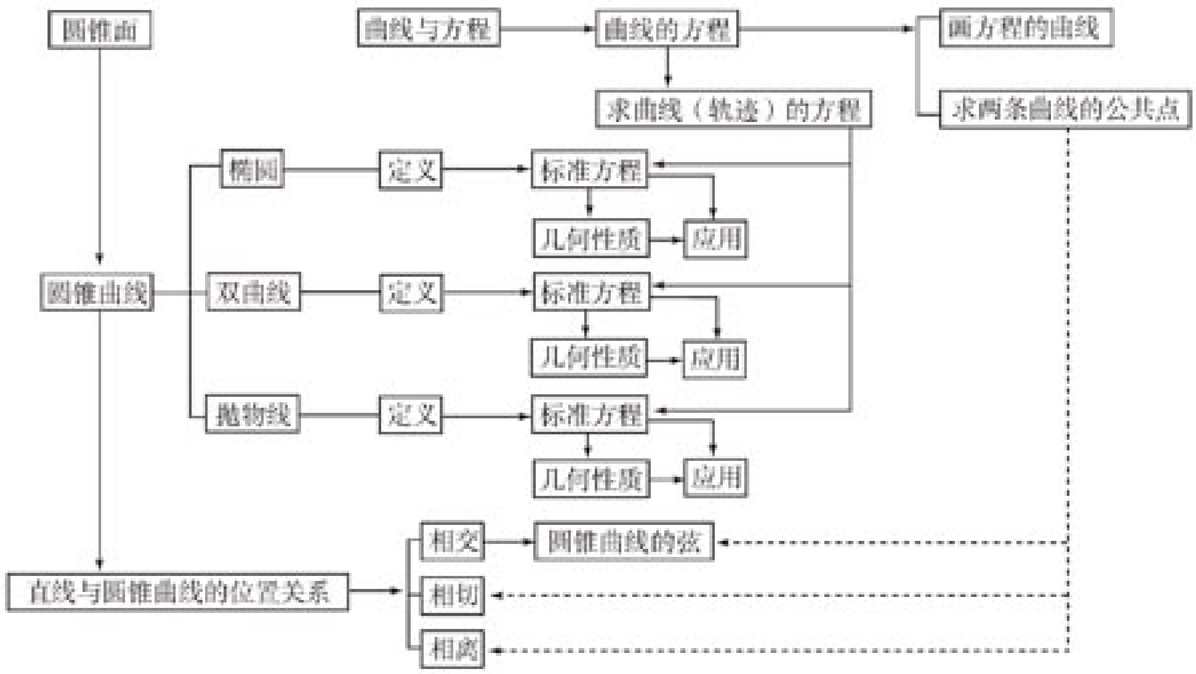
6. 已知椭圆的中心是坐标原点 O，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，一个焦点 F 的坐标为 $(c, 0)$ $(c>0)$，一个定点 A 的坐标为 $\left(\frac{10}{c}-c, 0\right)$，且 $\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{FA}$，过点 A 的直线与椭圆相交于两点 P，Q.

(1) 求椭圆的方程及离心率；

(2) 如果 $OP\perp OQ$，求直线 PQ 的方程.（提示：设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，则 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.）

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 平面内一点按照某种规律运动时，反映在图形上，是点的轨迹所呈现的曲线，反映在代数中，是点的坐标所满足的方程．在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 与方程 $F(x, y)=0$ 相对应是指曲线 C 上的点的坐标与方程 $F(x, y)=0$ 的解之间具有什么样的关系？试举例说明．

2. 椭圆、双曲线、抛物线是现实世界中物体运动的基本形式．从数学的角度来说，这些曲线分别是满足某些条件的点的集合(或轨迹)，我们用“坐标法”对它们进行了初步的研究．试用列表方法对椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程、图形特征、简单性质进行归纳整理，再作比较分析，把你的发现与同学进行交流．

3. 在对椭圆、双曲线的讨论中，分别都涉及到用字母 a，b，c，e 表示的四个基本量．这些量的几何意义分别是什么？它们之间有什么数量关系？

4. 直线与椭圆、双曲线、抛物线的位置关系，同直线与圆的位置关系一样，有相交、相切、相离三种情况，可以利用它们的方程进行研究. 如果由直线方程与抛物线（或双曲线）方程组成方程组，通过代入消元后得到一个一元一次方程，则这一直线与抛物线（或双曲线）有何种位置关系？

5. 对椭圆、双曲线、抛物线，可以分别从图形的生成、方程的形式、点的轨迹等不同角度说明它们的统一性. 例如它们都是一个不过圆锥面顶点的平面与圆锥面相交的交线；它们的方程都是二元二次方程. 那么从轨迹的角度来说，它们的统一定义是什么？

Ⅲ 巩固与提高

1. 选择题：

(1) 已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上一点 M 到椭圆的一个焦点的距离等于 4，那么点 M 到另一个焦点的距离等于(　　).

(A) 1　　(B) 3

(C) 6　　(D) 8

(2) 双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$的渐近线方程是（　　）.

(A) $4x\pm9y=0$　　(B) $9x\pm4y=0$

(C) $2x\pm3y=0$　　(D) $3x\pm2y=0$

(3) 抛物线 $y^2=4ax(a\neq0)$的焦点坐标是（　　）.

(A) $(a, 0)$　　(B) $(-a, 0)$

(C) $(0, a)$　　(D) $(0, -a)$

2. 填空题：

(1) 如果椭圆的一个焦点坐标为$(2, 0)$，过此焦点且垂直于 x 轴的弦的长等于$\frac{10}{3}$，那么这个椭圆的标准方程是__________________.

(2) 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$的左，右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与左支相交于 A，B 两点. 如果$|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$，那么$|AB|=$________.

(3) 在抛物线 $x^2=2y$ 上与点$M(0, 2)$距离最近的点的坐标是________.

(4) 过原点的直线 l 与双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$相交于两点，则 l 的斜率的取值范围是________.

(5) 设抛物线 $y^2=4x$ 与过其焦点的斜率为 1 的直线交于 A，B 两点，O 为坐标原点，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$________.

3. 求和双曲线 $x^2-y^2=8$ 有共同焦点且经过点 $P(4, 6)$的椭圆的方程.

4. 已知双曲线与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$的焦点相同，且它们的离心率之和等于$\frac{14}{5}$，求此双曲线的方程.

5. 已知点A是椭圆$x^2+2y^2=4$的长轴的左端点，以点A为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形ABC，求斜边BC的长.

6. 已知抛物线$y^2=4x$的弦AB经过它的焦点F，弦AB的长为20，求直线AB的方程.

7. 设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)，斜率为1的直线不经过原点O，而且与椭圆相交于A，B两点，M为线段AB的中点. 直线AB与OM能否垂直？证明你的结论.

8. 设A，B分别是直线$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x$和$y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x$上的动点，且$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$，设$O$为坐标原点，动点$P$满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求动点$P$的轨迹方程.

IV 自测与评估

1. 填空题：

(1) 椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的焦距等于________.

(2) 抛物线的顶点在原点，对称轴是坐标轴，且它过点$P(-2,\ 2\sqrt{2})$，则抛物线的方程是________.

(3) 双曲线$x^2-\frac{y^2}{24}=1$的焦点坐标是________.

(4) 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的中心任作一直线交椭圆于P，Q两点，F是椭圆的一个焦点，则$\triangle PFQ$的周长的最小值等于________.

2. 已知椭圆$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$上一点$P$与两个焦点的连线互相垂直，求点$P$的坐标.

3. 已知抛物线的顶点在原点，焦点为$F(-3,\ 0)$，设点$A(a,\ 0)$与抛物线上的点的距离的最小值$d=f(a)$，求$f(a)$的表达式.

4. 已知双曲线的渐近线方程为$3x\pm4y=0$，它的焦点是椭圆$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$的长轴端点，求此双曲线的方程.

5. 求过点$A(0,\ p)$与抛物线$y^2=2px(p>0)$只有一个公共点的直线的方程.

6. 已知方程$\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$，讨论当$k$在什么范围取值时，这个方程表示的曲线是：(1) 椭圆？(2) 双曲线？并分别指出它们的焦点坐标.

数学文化

阅读与欣赏

圆锥面与圆锥曲线

圆锥曲线在科学研究以及生产和生活中具有广泛的应用．关于圆锥曲线的基本理论，成熟于古希腊．当法国数学家笛卡儿（Deacartes，1596—1650）和费马（Fermat，1601—1665）创立了解析几何时，人们对圆锥曲线的认识进入了一个新阶段，对圆锥曲线的研究方法开始朝着解析几何的方向发展．到了18世纪，人们对解析几何广泛地进行探讨，表示圆锥曲线的二元二次方程也被化为几种标准形式，或者用参数方程来表示．1748年欧拉（Euler，1707—1783）出版了《无穷小分析引论》，在这部著作中，给出了现代形式下圆锥曲线的系统阐述，并从一般二元二次方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

出发，指出圆锥曲线的各种情形，经过适当的坐标变换，总可以化为几种标准形式之一．

有意思的是，在进行坐标旋转变换和伸缩变换时，$\Delta=b^2-4ac$ 的值是不会变的．而且，我们有如下结论：

若 $\Delta<0$，则上述方程可以化成椭圆方程或类似于椭圆方程的形式；

若 $\Delta=0$，则上述方程可以化成双曲线方程或类似于双曲线方程的形式；

若 $\Delta>0$，则上述方程可以化成抛物线方程或类似于抛物线方程的形式．

圆锥曲线是描述天体运行轨道时常用的曲线，也是我们日常生活中常见的曲线，圆锥曲线的光学性质在现实生活中的应用相当普遍．

下面我们不加证明直接列出圆锥曲线的一些光学性质：

(1) 从椭圆的一个焦点处发出光线照射到椭圆上，经反射后都通过另一个焦点（如图2-29）；

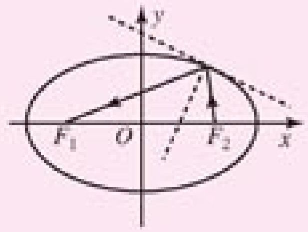


图 2-29

(2) 从双曲线的一个焦点处发出光线照射到双曲线上，经反射后会使光线散开，如同光线是从另一个焦点发出来的一样（如图2-30）；

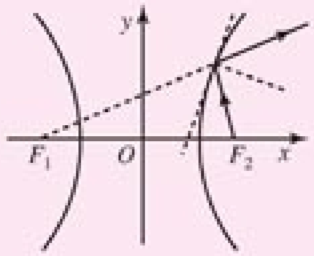


图 2-30

(3) 从抛物线焦点处发出的光线照射到抛物线上，经反射后都平行于抛物线的轴（如图2-31）．

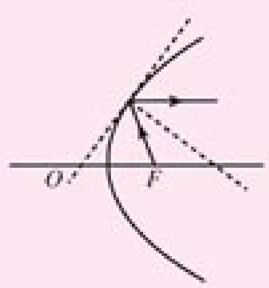


图 2-31

反之，平行于抛物线的轴的光线照射到抛物线上，经反射后都通过焦点（如图2-32）.

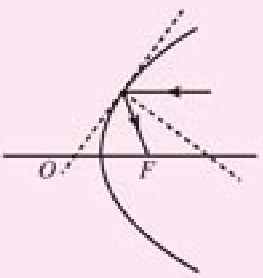


图 2-32

圆锥曲线的光学性质被人们广泛地应用于各种设计中．例如电影放映机的聚光灯的反射镜的形状是旋转椭圆面；手电筒、探照灯、太阳灶的反光镜都是旋转抛物面.

第三章 空间向量与立体几何

3.1 空间向量及其运算

3.2 空间向量在立体几何中的应用

在平面向量的学习中，我们已看到平面内与某个非零向量共线的全体向量构成的集合，可以由该集合内的任意一个非零向量生成，即任给这个集合中的一个非零向量 $\boldsymbol{e}$，该集合内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，都存在唯一一个实数 x，使

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}.$$

一个平面内全体向量构成的集合可由该平面内的任意两个不共线的向量生成，即任给这个集合中的两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，该集合内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，都存在唯一一对有序实数 (x, y)，使

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

这样，就可使我们用向量确定平面内任意一点的位置．由于向量具有一套优良的代数运算通性，我们就可用代数方法研究平面图形的性质，使数与形更好地结合在一起．

在空间中，具有大小和方向的量，仍叫做向量．由于我们生活的空间是立体的，所以我们会处处感受到空间向量的存在．空间中点的位移、风速、力等都是具有大小和方向的量．事实上，我们生活的空间就处处受到地球磁场力的作用．

容易想到平面向量集合只是空间向量集合的子集．平面向量有哪些性质可以推广到空间向量？空间向量本身又有哪些特有的性质呢？这是自然会引起我们思考的问题．

这一章，我们首先把平面向量的概念与运算推广到空间，接着研究空间向量的性质，并讨论向量在立体几何中的应用．

空间向量不仅是进一步学习数学的基础，同样它在物理学、工程、经济学及其他科学技术中都有着广泛的应用．

3.1 空间向量及其运算

3.1.1 空间向量的线性运算

1. 空间向量的概念

在空间中，同样把具有大小和方向的量叫做**向量**. 例如，空间中点的一个位移就是一个向量.

与平面向量一样，空间向量也是用有向线段来表示，并且用**同向且等长的有向线段表示同一向量或相等的向量**.

例如，图 3-1 中的位移向量 $\boldsymbol{a}$，可以分别用同向且等长的有向线段$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{DD'}$来表示，即

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}=\boldsymbol{a}.$$

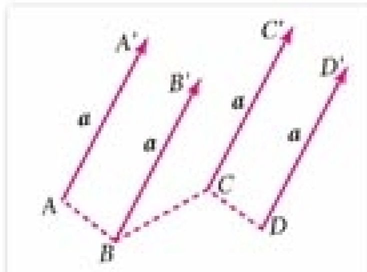


图 3-1

在空间中，用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量时，我们同样说向量$\overrightarrow{AB}$，A 为向量$\overrightarrow{AB}$的起点，B 为向量$\overrightarrow{AB}$的终点. 起点与终点重合的向量叫做**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 应注意，在手写向量时，仍要在字母上方加箭头.

与平面向量一样，表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段的长度叫做**向量的长度或模**，记作$|\boldsymbol{a}|$. 有向线段的方向表示向量的方向. 有向线段所在的直线叫做向量的**基线**.

如果空间中一些向量的基线互相平行或重合，则这些向量叫做**共线向量**或**平行向量**. 如图 3-2 所示，$\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 我们规定零向量与任意向量共线.

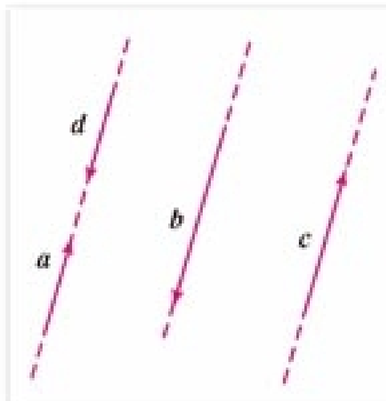


图 3-2

2. 空间向量的加法、减法和数乘向量运算

> **注**
> 应注意，平行向量的基线可能重合.

由于空间中任意两个向量都可以通过平移转化为平面向量，我们可把平面向量的线性运算，推广到空间中，用来定义空间向量的加法、减法和数乘向量运算.

例如，已知两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 这时，$O$，$A$，$B$ 三点不共线，于是这三点确定一个平面. 如图 3-3，我们有以下结论：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$；

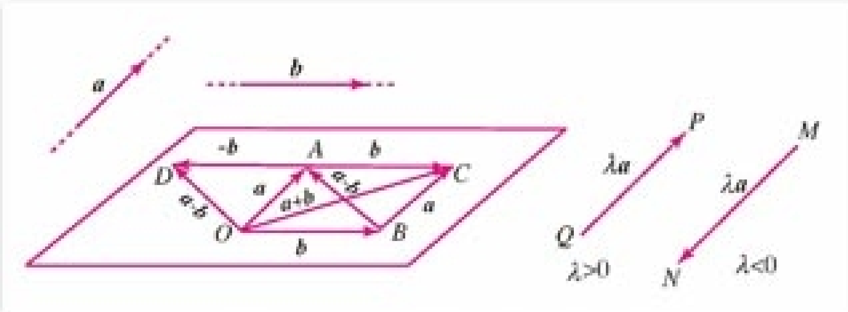


图 3-3

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\overrightarrow{QP}=\lambda\overrightarrow{OA}$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{OA}$.

想一想，以上运算结果，与向量起点的选择有没有关系.

由此可见，平面向量求和的**三角形法则**和**平行四边形法则**，对空间向量也同样成立.

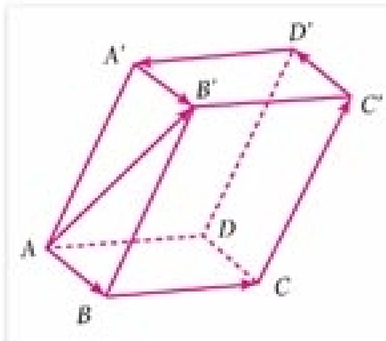


图 3-4

同样，我们也能把平面内多个向量的加法推广到空间. 如图 3-4所示

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB'}.$$

这就是说，表示相加向量的有向线段依次首尾相接，构成的折线从首到尾的向量就是这些相加向量的和. 为了便于记忆，常把这个和向量叫做“封口向量”.

空间向量的加法和数乘向量运算与平面向量一样，满足如下运算律：

(1) 加法交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 加法结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

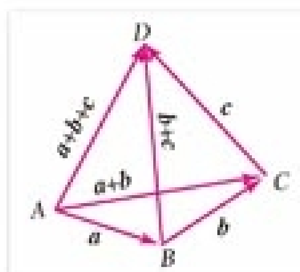


图 3-5

请同学根据图 3-5 中的空间四边形各边以及对角线表示的向量验证加法结合律.

由向量加法的交换律和结合律可以推知：

有限个向量求和，交换相加向量的顺序其和不变.

例 1　已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，化简下列向量表达式，并在图中标出化简结果的向量(图 3-6)：

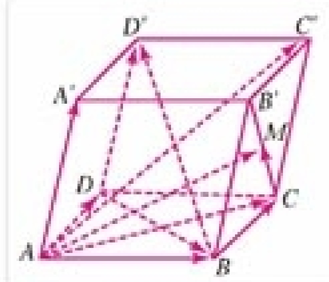


图 3-6

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$；

(2) $\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{BC})$.

解：(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$；

(2) $\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DD'}-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD'}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB'}$.

设 M 是线段 CB' 中点，则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}.$$

从上面例题的（1）我们可以得到下面的结论：

三个不共面的向量的和等于以这三个向量为邻边的平行六面体的对角线所表示的向量.

例 2 如图 3-7，M，N 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 AB，CD 的中点，求证：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

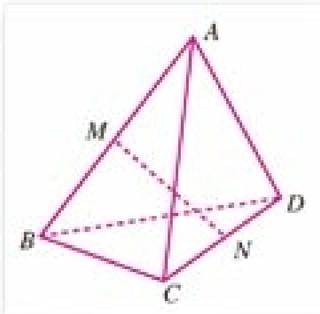


图 3-7

证明：显然

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}, \quad ①$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}. \quad ②$$

由已知，得 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{DN}=-\overrightarrow{CN}$.

①+②得 $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

因此

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

练习A

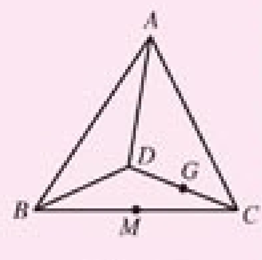
1. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$. 写出分别与向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA'}$ 相等的向量.
2. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，以图中一对顶点构造向量，使它们分别等于：

   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}$；　(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A'D'}$；　(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AA'}$；

   (4) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}$；　(5) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}-\overrightarrow{BA}$.
3. 已知空间四边形 $ABCD$，连接 AC，BD，设 M，G 分别是 BC，CD 的中点. 化简下列各表达式，并在图中标出化简结果的向量：

   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；　(2) $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$；

   (3) $\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.



（第 3 题）

练习B

1. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，M，N 分别是 AB，CD 的中点（参见图 3-7），化简下列各式：

   (1) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$；　　(2) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CN}$.

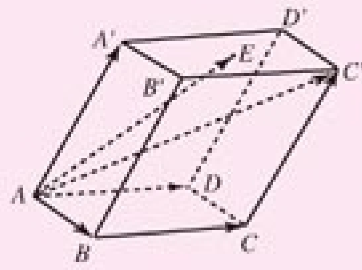
2. 化简：

   $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+5\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)-3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

3. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，点 E 是上底面 $A'C'$ 的中心，求下列各题中的 x，y 值：

   (1) $\overrightarrow{AC'}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$；

   (2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$.



（第3题）

3.1.2 空间向量的基本定理

1. 共线向量定理

两个平面向量共线的判定与性质，对于空间向量仍成立：

共线向量定理　两个空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在唯一的实数 x，使

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}.$$

定理的证明在“平面向量”中已经给出.

2. 共面向量定理

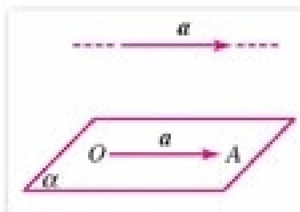


图 3-8

已知向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，如果 $\boldsymbol{a}$ 的基线 OA 平行于平面 α 或在 α 内，则就说向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\alpha$（图 3-8）.

通常我们把平行于同一平面的向量，叫做**共面向量**.

任意两个空间向量总是共面的，但任意三个空间向量就不一定共面了．例如，在图 3-9 所示的长方体中，向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，无论怎样平移都不能使它们在同一平面内.

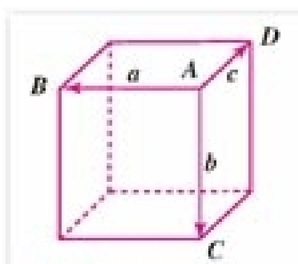


图 3-9

下面我们研究向量共面的判定与性质.

共面向量定理　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是，存在唯一的一对实数 x，y，使

$$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

证明：(1) 必要性：如果向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，我们总可以通过平移，使它们位于同一平面内．由平面向量的基本定理可知，一定存在唯一的实数对 x，y，使

$$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

(2) 充分性：如果 $\boldsymbol{c}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b},$$

则可选定一点 O(图 3-10)，作 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=y\boldsymbol{b}$，于是

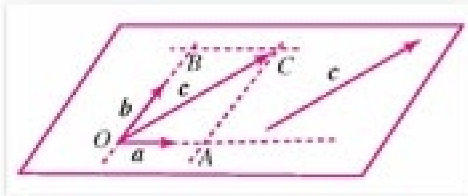


图 3-10

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

显然，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$都在平面 OAB 内，这就说明 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面．

> **注** 三个向量共面，又称这三个向量**线性相关**；反之，如果三个向量不共面，则称这三个向量**线性无关**．

例 1　已知斜三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$(图 3-11)，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$．在面对角线 AC' 上和棱 BC 上分别取点 M 和 N，使 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$ $(0\leqslant k\leqslant 1)$．求证：$\overrightarrow{MN}$与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面．

证明：显然 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC'}=k\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$，而且

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\boldsymbol{a}+k\overrightarrow{BC}\\&=\boldsymbol{a}+k(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\\\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{c}\\&=(1-k)\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

因此，$\overrightarrow{MN}$与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共面．

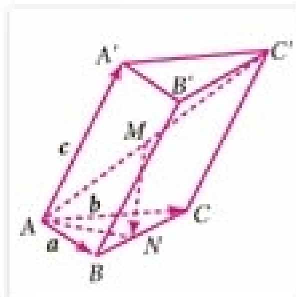


图 3-11

3. 空间向量分解定理

空间向量分解定理　**如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使**

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

证明：如图 3-12 所示，过点 O 作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},\ \overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}.$$

过点 P 作直线 PP' 平行于 OC，交平面 OAB 于点 P'，在平面 OAB 内，过 P' 作直线 $P'A'/\!/OB$，$P'B'/\!/OA$，分别与直线 OA，OB 相交于点 A'，B'，于是存在三个实数 x，y，z，使

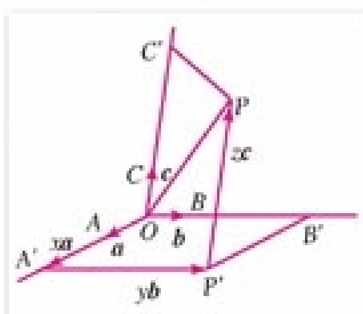


图 3-12

$$\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{P'P}=z\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{c},$$

因此$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{P'P}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，即

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}. \qquad ①$$

如果$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=x'\boldsymbol{a}+y'\boldsymbol{b}+z'\boldsymbol{c}$，则

$$(x-x')\boldsymbol{a}+(y-y')\boldsymbol{b}+(z-z')\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

下面证明$x=x'$，$y=y'$，$z=z'$. 事实上，如果$x\neq x'$，则

$$\boldsymbol{a}=-\frac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{b}-\frac{z-z'}{x-x'}\boldsymbol{c},$$

由此可知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面，这与已知矛盾. 因此$x=x'$.

同理可知$y=y'$，$z=z'$.

这就证明了表达式①是唯一的.

表达式$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，叫做向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的**线性表示式**或**线性组合**.

由上述定理可知，如果三个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是三个不共面的向量，则$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的线性组合$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$能生成所有的空间向量，这时$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$叫做空间的一个**基底**，记作$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$，其中$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$都叫做**基向量**.

由上述定理可知，任意三个不共面的空间向量都可以构成空间的一个基底.

例 2　已知平行六面体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$（图 3-13），设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，试用基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示如下向量：$\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{DB'}$.

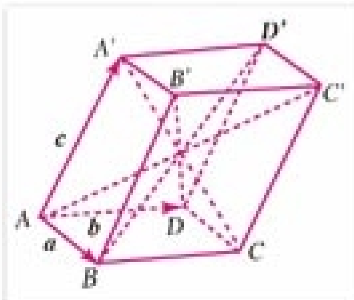


图 3-13

解：$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

$\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

例 3　已知空间四边形$OABC$中，M，N分别是对边OA，BC的中点，点G在MN上，且$MG=2GN$（图 3-14）. 设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，试用基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示向量$\overrightarrow{OG}$.

解：由线段中点的向量表达式，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN})\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\right]\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}\\&=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

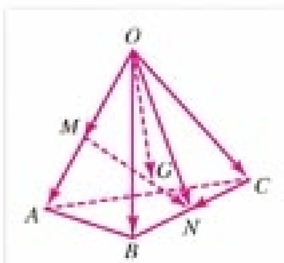


图 3-14

练习A

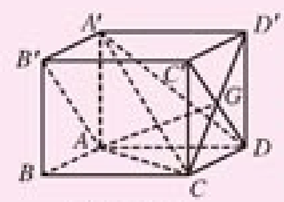
1. 两条直线重合或共面与两个向量共线或共面各有什么不同？
2. 空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面能否推出它们之间不会平行？
3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，并且 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ 是否共面？
4. 已知向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$可以构成空间向量的一个基底，基底中的哪一个向量可以与向量$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$和向量$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$构成三个不共面向量？
5. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$（图 3-13），设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，$O$ 为$\overrightarrow{AC'}$的中点，用基底$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$表示如下向量：$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$.

练习B

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$，证明这三个向量共面.
2. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，并且 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{r}=-7\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}+22\boldsymbol{c}$，向量 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ 是否共面？
3. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，用基底$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$表示如下向量：

   (1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB'}$，$\overrightarrow{A'D}$，$\overrightarrow{DC'}$；

   (2) $\overrightarrow{AG}$（点 G 是侧面 $CC'D'D$ 的中心）.



（第 3 题）

3.1.3 两个向量的数量积

1. 两个向量的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（图 3-15），在空间中任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则角$\angle AOB$ 叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$.

通常规定

$$0\leqslant\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi.$$

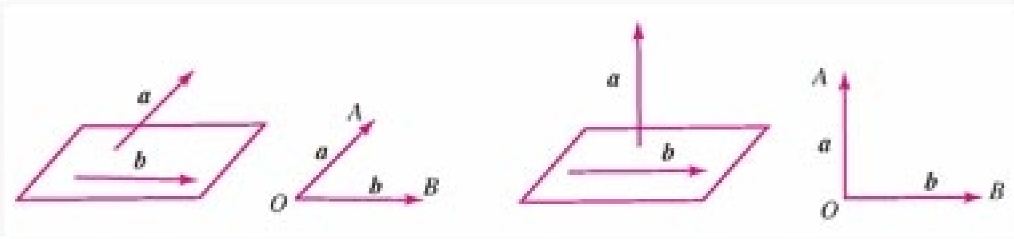


图 3-15

在这个规定下，两个向量的夹角就被唯一确定了，并且

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle.$$

如果$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=90^\circ$，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **互相垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp \boldsymbol{b}$.

> **注** 一条直线在空间有自己固定的位置，而一个向量在空间可平行移动，没有固定的位置.

我们知道，两个向量一定共面．但在作有向线段分别表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 时，它们的基线可能不在同一平面内，我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**．把异面直线平移到一个平面内，这时两条直线的夹角（锐角或直角）叫做**两条异面直线所成的角**．如果所成的角是直角，则称**两条异面直线互相垂直**.

例 1　图 3-16 表示一个正方体，求下列各对向量的夹角：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{A'C'}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{C'A'}$；

(3) $\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{A'D'}$；　　(4) $\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{B'A'}$.

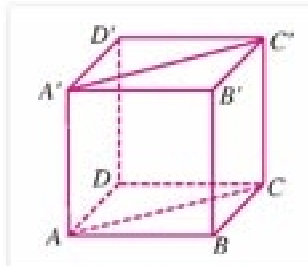


图 3-16

解：(1) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle=45^\circ$；

(2) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'A'}\rangle=135^\circ$；

(3) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\rangle=90^\circ$；

(4) $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'A'}\rangle=180^\circ$.

2. 两个向量的数量积

在平面向量中，我们通过力做功和向量在轴上的投影的计算，引入了两个向量数量积的定义．平面向量的数量积可推广到空间向量.

已知空间两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，总可以把它们平移到一个平面内，把平面向量的数量积

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle,}$$

叫做两个空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（或**内积**）.

由这个定义可知，两个向量的数量积是一个实数.

与平面上两个向量的数量积一样，两个空间向量的数量积也具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}\rangle$；	(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；
(3) $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；	(4) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

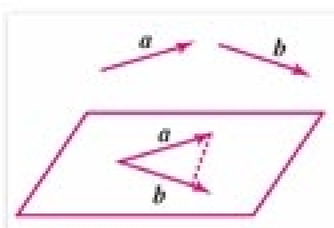


图 3-17

两个空间向量的数量积同样满足如下运算律：

(1) $(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{a}$； (交换律)

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{c}$. (分配律)

下面我们来证明数量积的分配律.

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，如果这三个已知向量共面，在平面向量中我们已经证明分配律成立. 现假设这三个向量不共面(图 3-18).

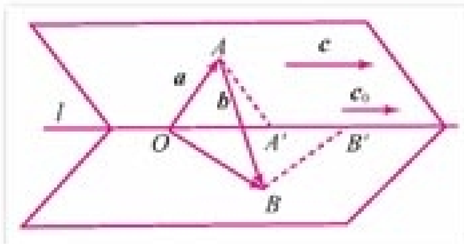


图 3-18

作轴 $l\parallel \boldsymbol{c}$，设轴的单位向量为 $\boldsymbol{c}_0$.

在 l 上任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，连 OB，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 过点 A 作 AA' 垂直 l 于点 A'，过点 B 作 BB' 垂直 l 于点 B'，则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}_0=\overrightarrow{OB}\cdot \boldsymbol{c}_0=OB',$$

$$\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c}_0=\overrightarrow{OA}\cdot \boldsymbol{c}_0=OA',$$

$$\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{c}_0=\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{c}_0=A'B'.$$

因为 $OB'=OA'+A'B'$，所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{c}_0.$$

上式两边同乘以 $|\boldsymbol{c}|$，即可证明

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{c}.$$

例 2 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β(图 3-19)，$\alpha\cap\beta=l$，点 A，B 在 α 内，并且它们在 l 上的正射影分别为 A'，B'；点 C，D 在 β 内，并且它们在 l 上的正射影分别为 C'，D'，求证：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

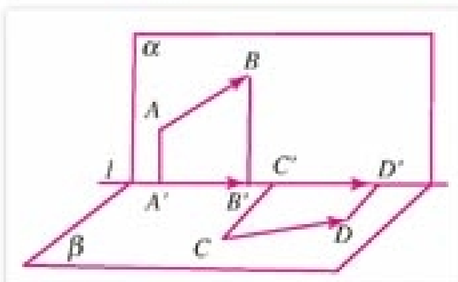


图 3-19

证明：因为 $A'B'$ 和 $C'D'$ 分别为 AB 和 CD 在 l 上的正射影，又因为 $\alpha\perp\beta$，所以 $AA'\parallel BB'$，并且它们都与 $C'C$，CD，DD' 垂直；$CC'\parallel DD'$，并且它们都与 $A'A$，AB，BB' 垂直.

因此，$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$ 分别和 $\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{C'D'}$，$\overrightarrow{D'D}$ 的数量积等于零；$\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{DD'}$ 分别和 $\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'B}$ 的数量积等于零.

从而可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}&=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B})\cdot(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D})\\&=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{C'D'}.\end{aligned}$$

例 3 已知长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，$AB=AA'=2$，$AD=4$，E 为侧面 AB' 的中心，F 为 $A'D'$ 的中点，计算下列数量积：$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED'}$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB'}$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC'}$.

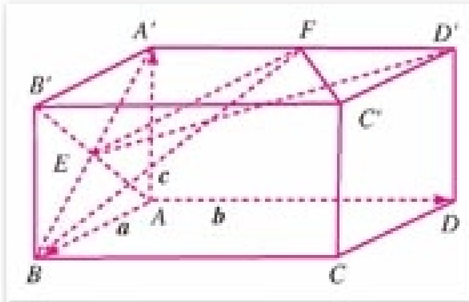


图 3-20

解：设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，则

$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

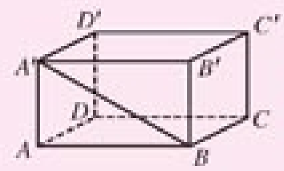
$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED'}=\boldsymbol{b}\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\right]=|\boldsymbol{b}|^2=4^2=16,$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB'}&=\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\\&=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2=2^2-2^2=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC'}&=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)\\&=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)\\&=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2=2.\end{aligned}$$

练习A

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中：



（第1题）

(1) 哪些棱所在直线与直线 AA' 成异面直线，且互相垂直？

(2) 已知 $AB=\sqrt{3}$，$AA'=1$，求向量$\overrightarrow{BA'}$分别与$\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{D'C'}$和$\overrightarrow{B'C'}$的夹角.

2. 根据下列各等式，分别求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$；　　(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-1$；

(3) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$；　　(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

3. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　　(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　　(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

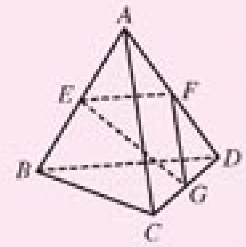
练习B

1. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，点 A'，B' 分别是点 A，B 在 OB，OA 上的正射影. 求证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA'}$.

2. 已知四面体 $ABCD$ 的每条棱长都等于 a，点 E，F，G 分别是棱 AB，AD，DC 的中点，求下列向量的内积：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$；　(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$；

(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$；　(5) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BA}$；　(6) $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}$.



（第 2 题）

3. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，求：

(1) $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DB'}$，$\langle\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{DB'}\rangle$；　(2) $\overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{AD}$.

3.1.4 空间向量的直角坐标运算

1. 空间向量的直角坐标运算

建立空间直角坐标系 $Oxyz$，分别沿 x 轴，y 轴，z 轴的正方向引单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，这三个互相垂直的单位向量构成空间向量的一个基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，这个基底叫做**单位正交基底**(图 3-21)．单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 都叫做**坐标向量**.

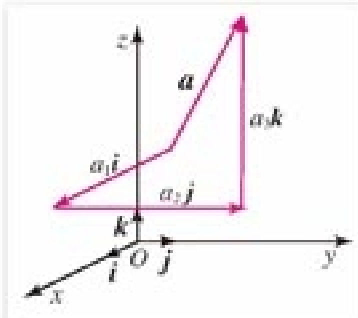


图 3-21

空间直角坐标系 $Oxyz$，也常说成空间直角坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$.

在空间直角坐标系中，已知任一向量 $\boldsymbol{a}$，根据空间向量分解定理，存在唯一实数组(a_1,a_2,a_3)，使

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

$a_1\boldsymbol{i}$，$a_2\boldsymbol{j}$，$a_3\boldsymbol{k}$ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 方向上的分向量，有序实数组(a_1,a_2,a_3)叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在此直角坐标系中的坐标．上式可简记作

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3).$$

于是，我们在空间向量集合的元素与三元有序实数组集合的元素之间建立了一一对应关系，即

$$\boldsymbol{a}\leftrightarrow(a_1,a_2,a_3).$$

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则容易得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

以上向量坐标运算法则，留给同学们自己证明.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，对空间任一点 P，相对于原点确定了一个向量$\overrightarrow{OP}$(图 3-22)．设

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

则(x, y, z)也就是点P的坐标，即$P(x, y, z)$.

设$A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

这就是说，**一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.**

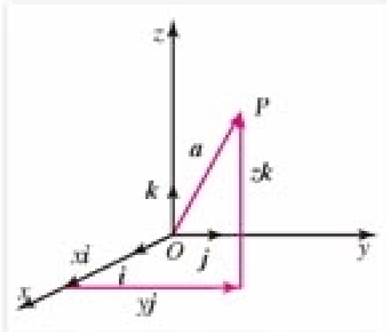


图 3-22

2. 空间向量平行和垂直的条件

我们知道

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b},$$

换用坐标表示，得

$$\boxed{\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=\lambda b_1\\a_2=\lambda b_2\\a_3=\lambda b_3\end{cases}}$$

当$\boldsymbol{b}$与三个坐标平面都不平行时，

$$\boxed{\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.}$$

我们还知道

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

换用坐标表示，得

$$\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.}$$

例 1　已知$\boldsymbol{a}=(1, 1, 0)$，$\boldsymbol{b}=(0, 1, 1)$，$\boldsymbol{c}=(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，求：$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$.

解：$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

$=(1, 1, 0)-(0, 1, 1)$

$=(1, 0, -1)$；

$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

$=(1, 1, 0)+2(0, 1, 1)-(1, 0, 1)$

$=(0, 3, 1)$；

$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=(1, 0, -1)\cdot(0, 3, 1)$

$=1\times0+0\times3+(-1)\times1$

$=-1$.

例 2　已知向量$\boldsymbol{a}=(-2, 2, 0)$，$\boldsymbol{b}=(-2, 0, 2)$，求向量$\boldsymbol{n}$使$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$.

解：设$\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，则

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=(x,\ y,\ z)\cdot(-2,\ 2,\ 0)=-2x+2y=0,$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=(x,\ y,\ z)\cdot(-2,\ 0,\ 2)=-2x+2z=0.$$

解方程组$\begin{cases}-x+y=0\\-x+z=0\end{cases}$

这个方程组有三个未知数，但只有两个方程. 不妨把未知数 x 当作已知，求 y，z. 可得 $y=x$，$z=x$，于是

$$\boldsymbol{n}=(x,\ x,\ x)=x(1,\ 1,\ 1).$$

显然，当 x 取任意实数时，可以得到无穷多个向量都与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直，但这无穷多个向量都与向量$(1,\ 1,\ 1)$共线.

3. 两个向量夹角与向量长度的坐标计算公式

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$
$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$
$$\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

设 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 3 已知 $A(1,\ 1,\ 0)$，$B(0,\ 3,\ 0)$，$C(2,\ 2,\ 3)$(图 3-23)，求：

(1) $\langle\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\rangle$(精确到 $0.1°$)；

(2) $\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上正投影的数量(精确到 0.01).

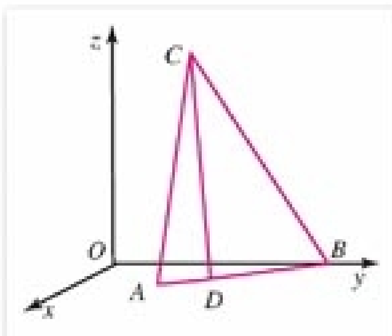


图 3-23

解：(1) 由点 A，B，C 的坐标可求得

$$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(1,\ 1,\ 3),$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{11},$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\times1+2\times1+0\times3=1,$$

因此

$$\cos\langle\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{55}},$$

查表或使用计算工具，得$\langle\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\rangle\approx82.3°$；

(2) 如图 3-23 所示，$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上正投影的数量

$$\begin{aligned}AD&=|\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\rangle\\&=\sqrt{11}\times\frac{1}{\sqrt{55}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx0.45.\end{aligned}$$

探索与研究

(1) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，作出例 2 中的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}$.

(2) 已知 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，求一向量与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直.

练习A

1. 已知空间直角坐标系 $[O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$，求下列向量的坐标：

(1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$；　(2) $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$；

(3) $\boldsymbol{c}=8\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$；　(4) $\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}$；

(5) $\boldsymbol{e}=8\boldsymbol{i}$；　(6) $\boldsymbol{f}=8\boldsymbol{j}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(3, 2, -1)$，$\boldsymbol{b}=(5, -3, 2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(4) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

3. 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标：

(1) $A(2, -3, -1)$，$B(-6, 5, 3)$；　(2) $A(-2, 3, 6)$，$B(-8, -6, 4)$.

4. 下列每对向量是否平行？

(1) $(0, 0, 5)$，$(0, 0, 7)$；　(2) $(4, 0, 3)$，$(8, 0, 6)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)$，$\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{5}\right)$；　(4) $\left(-\frac{2}{3}, 6, \frac{4}{3}\right)$，$\left(\frac{9}{8}, -\frac{9}{2}, -1\right)$.

5. 下列每对向量是否垂直？

(1) $(3, 4, 0)$，$(0, 0, 5)$；　(2) $(3, 1, 3)$，$(1, 0, -1)$；

(3) $(-2, 1, 3)$，$(6, -5, 7)$；　(4) $(6, 0, 12)$，$(6, -5, 7)$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1, 0, -1)$，$\boldsymbol{b}=(0, 1, -1)$，求向量 $\boldsymbol{n}$ 使 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$.

7. 求下列两个向量夹角的余弦：

(1) $\boldsymbol{a}=(2, -3, \sqrt{3})$，　$\boldsymbol{b}=(1, 0, 0)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-1, -1, 1)$，$\boldsymbol{b}=(-1, 0, 1)$.

8. 已知点 $A(1, 0, 1)$，$B(1, 1, 1)$，$C(-3, 1, 5)$，$D(0, 2, 3)$，求向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$ 的长度.

练习B

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,3)$，$\boldsymbol{c}=(0,0,2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b})$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,-2,5)$和 $\boldsymbol{b}=(1,y,-3)$平行，求 x，y.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,x,5)$和 $\boldsymbol{b}=(-8,y,0)$垂直，求 x，y 满足的条件.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(5,-3,12)$，$\boldsymbol{b}=(-2,0,5)$，求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，求$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$：

(1) $\boldsymbol{a}=(1,2,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,5)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(3,4,5)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,0)$.

习题3-1 A

1. 作任意一个平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，作出如下向量：

(1) $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；　　(2) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$；

(3) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；　　(4) $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$.

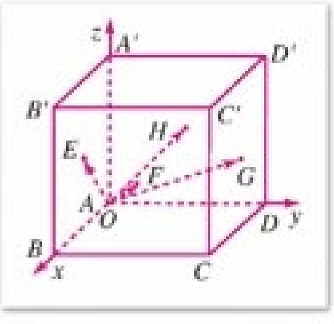
2. 已知三个向量分别平行于 x 轴，y 轴，z 轴，它们的坐标各有什么特点？

3. 已知向量$(x,y,2)$与向量$(3,4,6)$共线，求 x，y.

4. 求证：向量$(1,0,-1)$、向量$(1,1,0)$和向量$(0,1,1)$共面.

5. 如果一个向量的 z 坐标为0，其他坐标都不为0，那么这个向量与哪个坐标面平行？

6. 如图，建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 一单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$的顶点 A 位于坐标原点，棱 AB，AD，AA'分别在 x 轴，y 轴，z 轴上，E，F，G，H 分别是侧面OB'，CB'，CD'，DA'的中心. 求向量$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OH}$的坐标.



（第6题）

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,2,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,-3,0)$，$\boldsymbol{c}=(7,-2,1)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2$；　　(4) $(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|)^2$.

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，求 $\boldsymbol{a}$ 与坐标基向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 夹角的余弦.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,\ -1,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=\left(1,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$. 试确定它们之间的关系.

10. 求下列两个向量的夹角的余弦值：

(1) $\boldsymbol{a}=(3,\ -5,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 2,\ 0)$；

(2) $\boldsymbol{c}=(-1,\ 3,\ -5)$，$\boldsymbol{d}=(3,\ 12,\ 0)$.

11. 已知 $A(0,\ 0,\ 0)$，$B(2,\ 5,\ 0)$，$C(1,\ 3,\ 5)$，求$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上投影的数量.

12. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,\ 2,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ 2,\ 5)$，求同时与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直的一个向量.

习题 3-1 B

1. 求下列向量方程中的向量 $\boldsymbol{x}$：

(1) $2(-1,\ 5,\ 1)+4\boldsymbol{x}=(2,\ 14,\ -2)$；　　(2) $(3,\ 7,\ 1)+2\boldsymbol{x}=(6,\ 10,\ 4)-\boldsymbol{x}$.

2. 如果表示一组平行向量的有向线段的起点都在坐标原点，试问它们的终点是否在同一条直线上.

3. 如果存在三个不全为 0 的实数 x，y，z，使得向量 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，试问 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否共面？

4. 求与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量：

(1) $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 5)$；　　(2) $\boldsymbol{a}=(0,\ -3,\ 4)$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ 1)$，求同时与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直的单位向量.

6. 已知点 $A(2,\ 3,\ -1)$，$B(8,\ -2,\ 4)$，$C(3,\ 0,\ 5)$，是否存在实数 x，使$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$垂直？

3.2 空间向量在立体几何中的应用

在学习平面向量时我们已经知道，可以用向量确定平面上一点的位置或点的集合(轨迹)．同样，我们可以利用空间向量确定空间中一点的位置或点的集合．

已知向量 $\boldsymbol{a}$，在空间中固定一个基点 O，再作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，则点 A 在空间中的位置就被向量 $\boldsymbol{a}$ 所唯一确定了．这时，我们称这个向量为**位置向量**．当在空间中给定一点时，就可以用不同的向量确定空间中不同点的位置．这就使我们能够用向量和向量运算研究空间图形的性质．

3.2.1 直线的方向向量与直线的向量方程

1. 用向量表示直线或点在直线上的位置

给定一个定点 A 和一个向量 $\boldsymbol{a}$(图 3-24)，再任给一个实数 t，以 A 为起点作向量

$$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}, \qquad ①$$

这时点 P 的位置被 t 的值完全确定．容易看到，当 t 在实数集 $\mathbf{R}$ 中取遍所有值时，点 P 的轨迹是通过点 A 且平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的一条直线 l．反之，在直线 l 上任取一点 P，一定存在一个实数 t，使 $\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$．

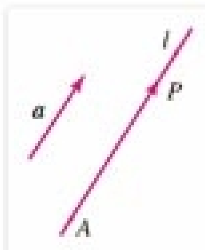


图 3-24

向量方程①通常称作**直线 l 以 t 为参数的参数方程**．向量 $\boldsymbol{a}$ 称为该**直线的方向向量**．

直线的向量方程①，还可作如下的表示：对空间任一个确定的点 O(图 3-25)，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在唯一的实数 t，满足等式

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}. \qquad ②$$

如果在 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，则②式可化为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}),$$

即

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}. \qquad ③$$

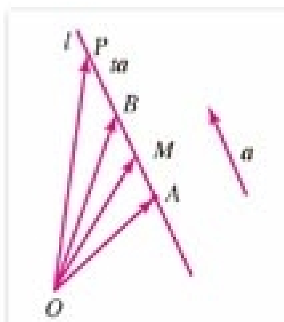


图 3-25

①或②或③都叫做**空间直线的向量参数方程**，它们都与平面的直线向量参数方程相同．

在③中，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，我们就可以得到线段中点的向量表示式．设点 M 是线段 AB 的中点，则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

这就是线段 AB 中点的向量表达式.

下面我们举例说明，如何利用直线的方向向量和向量运算确定直线上任一点的位置.

例 1　已知点 $A(2,4,0)$，$B(1,3,3)$(图 3-26)，以 $\overrightarrow{AB}$ 的方向为正向，在直线 AB 上建立一条数轴，P，Q 为轴上的两点，且分别满足条件：

(1) $AP:PB=1:2$；　　　　(2) $AQ:QB=-2$.

求点 P 和点 Q 的坐标.

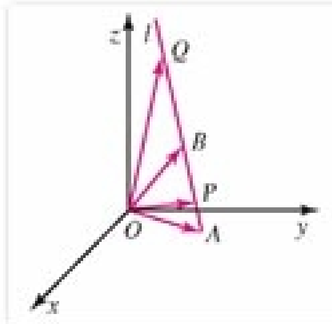


图 3-26

解：(1) 由已知，得 $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AP}$，即

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}),$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}.$$

设点 P 坐标为 (x,y,z)，则上式换用坐标表示，得

$$(x,y,z)=\frac{2}{3}(2,4,0)+\frac{1}{3}(1,3,3),$$

即

$$x=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3},\ y=\frac{8}{3}+\frac{3}{3}=\frac{11}{3},\ z=0+1=1.$$

> **注**　在例 1 中，可以直接用直线的向量参数方程求解：根据条件求出 t，直接代入方程.

因此，P 点的坐标是 $\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},1\right)$.

(2) 因为 $AQ:QB=-2$，所以

$$\overrightarrow{AQ}=-2\overrightarrow{QB},$$

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=-2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}),$$

$$\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}.$$

设点 Q 的坐标为 (x,y,z)，则上式换用坐标表示，得

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=-(2,4,0)+2(1,3,3)\\&=(0,2,6),\end{aligned}$$

即 $x=0$，$y=2$，$z=6$.

因此，Q 点的坐标是 $(0,2,6)$.

练习A

1. 已知直线的向量参数方程为 $(x,y,z)=(5,0,3)+t(0,3,0)$，当 $t=-3$，0，2，5 时，对应直线上的 A，B，C，D 四点．画出该直线和点 A，B，C，D 的位置.

2. 已知点 $A(3, 4, 5)$，$B(3, 4, 0)$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA}$（$O$ 为坐标原点），求点 C 的坐标.

3. 已知点 $A(-2, 3, 0)$，$B(1, 3, 2)$，以$\overrightarrow{AB}$的方向为正向，在直线 AB 上建立一条数轴，P，Q 为轴上的两点，且满足条件：

(1) $AQ:QB=-2$；　　(2) $AP:PB=2:3$.

求点 P 和点 Q 的坐标.

练习B

1. 一个质点从点 $A(5, 0, 8)$出发，作匀速直线运动，每秒钟的速度向量 $\boldsymbol{v}=(0, 3, 4)$，在空间直角坐标系中，标出这个质点运动 1 s，3 s，5 s 后所在的位置.

2. 已知点 $A(3, 4, 0)$，$B(2, 5, 5)$，而且$\overrightarrow{BC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}$，其中 O 为坐标原点，求点 C 的坐标.

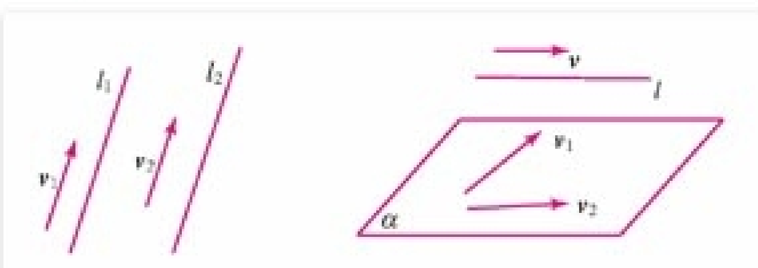
3. 已知点 $A(3, 4, 0)$，$B(2, 5, 5)$，$C(0, 3, 5)$，且 $ABCD$ 是平行四边形，求顶点 D 的坐标.

4. 已知 O 为坐标原点，四面体 $OABC$ 的顶点 $A(0, 3, 5)$，$B(2, 2, 0)$，$C(0, 5, 0)$，直线 $BD /\!/ CA$，并且与坐标平面 xOz 相交于点 D，求点 D 的坐标.

2. 用向量方法证明直线与直线平行、直线与平面平行、平面与平面平行

设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$（图 3-27（1）），则由向量共线的条件，得

$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \text{ 或 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \iff \boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2.}$$



(1)　　(2)

图 3-27

已知两个不共线向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 与平面 α 共面（图 3-27(2)），一条直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}$，则由共面向量定理，可得

$l /\!/ \alpha$ 或 l 在 α 内 $\Leftrightarrow$ 存在两个实数 x，y，使 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{v}_1+y\boldsymbol{v}_2$.

由共面向量定理，我们还可以得到：

如果 A，B，C 三点不共线，则点 M 在平面 ABC 内的充分必要条件是，存在一对实数 x，y，使向量表达式

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

成立.

已知两个不共线的向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 与平面 α 共面，则由两平面平行的判定与性质，得

$\alpha /\!/ \beta$ 或 α 与 β 重合 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1 /\!/ \beta$ 且 $\boldsymbol{v}_2 /\!/ \beta$.

例 2　如图 3-28，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，点 M，N 分别是面对角线 $A'B$ 与面对角线 $A'C'$ 的中点.

求证：$MN /\!/$ 侧面 AD'；$MN /\!/ AD'$，并且 $MN=\dfrac{1}{2}AD'$.

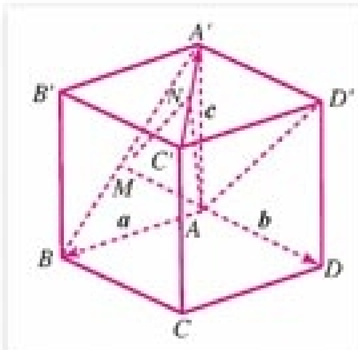


图 3-28

证明：设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，则

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}),\ \overrightarrow{AN}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

因此 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

因为 M 不在平面 AD' 内，所以

$$MN /\!/ \text{平面 } AD'.$$

又因为 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD'}$，所以

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD'}.$$

因此 $MN /\!/ AD'$，$MN=\dfrac{1}{2}AD'$.

注　请用综合法证明例 2，从中体会向量运算的几何意义.

练习A

1. 已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$，AD 为公共边，但它们不在同一平面上，点 M，N 分别在对角线 BD，AE 上，且 $BM=\dfrac{1}{3}BD$，$AN=\dfrac{1}{3}AE$. 证明：直线 $MN /\!/$ 平面 CDE.
2. 已知▱$ABCD$，从平面 $ABCD$ 外一点 O 引射线 OA，OB，OC，OD，在其上分

别取 E，F，G，H，并且使$\frac{OE}{OA}=\frac{OF}{OB}=\frac{OG}{OC}=\frac{OH}{OD}=k$（$k$ 为常数）．求证：E，F，G，H 四点共面．

3. 求证：四点 $A(3,0,5)$，$B(2,3,0)$，$C(0,5,0)$，$D(1,2,5)$共面．

练习B

1. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点．证明：$EFGH$ 是平行四边形．

2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 M，N 分别是棱 BB' 与对角线 CA' 的中点．求证：$MN/\!/BD$，$MN=\frac{1}{2}BD$．

3. 已知 A，B，C 三点不共线，对平面 ABC 外任一点 O，满足下面条件的点 M，是否一定在平面 ABC 内？

(1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$；

(2) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$．

3. 用向量运算证明两条直线垂直或求两条直线所成的角

如果知道两条直线的方向向量，我们就可以利用两个方向向量是否平行（或重合）、垂直来判定直线是否平行、垂直．

设两条直线所成的角为 θ，则直线方向向量间的夹角与 θ 相等或互补．

如图 3-29 所示，设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，则有

$$\boxed{\begin{aligned}&l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1\perp \boldsymbol{v}_2,\\&\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle|.\end{aligned}}$$

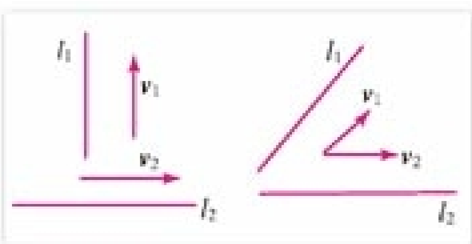


图 3-29

例 3 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，点 M，N 分别是棱 BB'与对角线 CA'的中点．求证：$MN\perp BB'$； $MN\perp A'C$．

证明：不妨设已知正方体的棱长为 1．如图 3-30，以 A 为坐标原点 O 建立空间直角坐标系$[O;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}]$．由已知条件，得

$M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$，$B(1, 0, 0)$，$C(1, 1, 0)$，

$A'(0, 0, 1)$，$N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$B'(1, 0, 1)$，

$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$，$\overrightarrow{A'C}=(1, 1, -1)$，

$\overrightarrow{BB'}=(0, 0, 1)$.

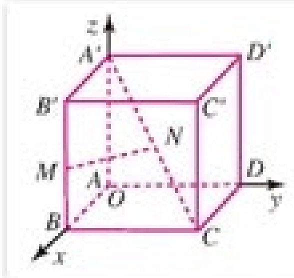


图 3-30

因为

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A'C}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\cdot(1, 1, -1)$$
$$=-\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times1+0\times(-1)=0,$$
$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BB'}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\cdot(0, 0, 1)$$
$$=-\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times0+0\times1=0,$$

所以 $MN\perp A'C$；$MN\perp BB'$.

例 4　已知三棱锥 $O\text{-}ABC$（图 3-31），$OA=4$，$OB=5$，$OC=3$，$\angle AOB=\angle BOC=60°$，$\angle COA=90°$，$M$，$N$ 分别是棱 OA，BC 的中点.

求：直线MN与AC所成的角（精确到 0.1°）.

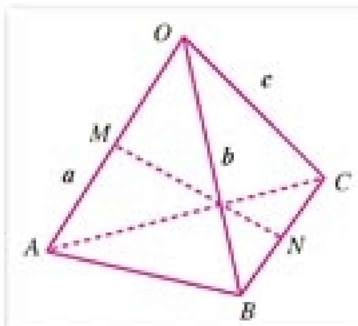


图 3-31

解：设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，直线 MN 与 AC 所成的角为 θ，则

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

因此

$$|\overrightarrow{MN}|^2=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}$$
$$=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$
$$=\frac{1}{4}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$=\frac{1}{4}(4^2+5^2+3^2+15-20-0)=\frac{45}{4},$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$
$$=4^2+3^2-0=25,$$

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{c}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{a}|^2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2}+9-10-0+16\right)=\frac{45}{4}.$$

因此

$$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{AC}|}\right|$$
$$=\frac{\frac{45}{4}}{\sqrt{\frac{45}{4}}\times 5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

查表或使用计算器，得 $\theta\approx 47.9°$，即直线MN与AC所成的角约为 $47.9°$.

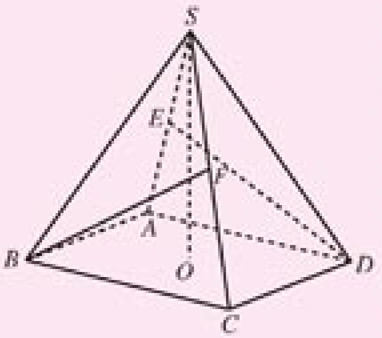
注 从以上几个例子，可以看到，用向量方法解几何题的一般步骤是：把线段转化为向量来表示，并通过已知向量表示未知向量，或选用基向量表示其他向量，然后通过向量运算去计算或证明.

练习A

1. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 E，F 分别是棱 BB' 与面对角线 $B'D'$ 的中点. 求证：直线$EF\perp$直线$A'D$.

2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，点 M，N 分别在面对角线 AD' 和面对角线 BD 上，并且$\frac{AM}{AD'}=\frac{BN}{BD}$. 求证：直线$MN\perp$直线$AD$.

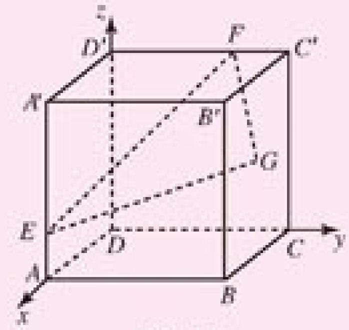
3. 如图，四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的高 $SO=3$，底面是边长为 2，$\angle ABC=60°$的菱形，O 为底面的中心，E，F 分别为 SA 和 SC 的中点，求异面直线 BF 与 DE 所成的角.



（第 3 题）

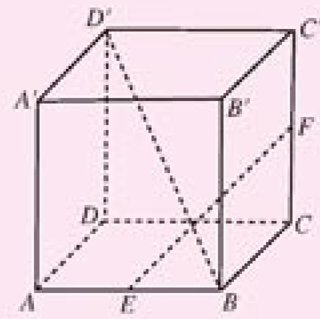
练习B

1. 已知单位正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$，点 E，F 分别在棱 AA' 与 $C'D'$ 上，且 $AE=\frac{1}{4}AA'$，$C'F=\frac{3}{8}C'D'$，G 为侧面 $BCC'B'$ 的中心；
   (1) 求点 E，F，G 的坐标；
   (2) 求证：$\triangle EGF$ 为直角三角形.



（第1题）

2. 已知正四面体 $ABCD$，M，N，P，Q 分别是棱 AB，BC，CD，DA 的中点，求证 $MNPQ$ 为正方形.
3. 已知正四面体 $OABC$，M，N 分别是棱 OA，BC 的中点，求 MN 与 OB，OC 所成的角.
4. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 a，E，F 分别是棱 AB，CC' 的中点，求直线 EF 与 BD' 所成的角.



（第4题）

3.2.2 平面的法向量与平面的向量表示

已知平面 α（图 3-32），如果向量 $\boldsymbol{n}$ 的基线与平面 α 垂直，则向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做**平面 α 的法向量**或说向量 $\boldsymbol{n}$ 与平面 α 正交.

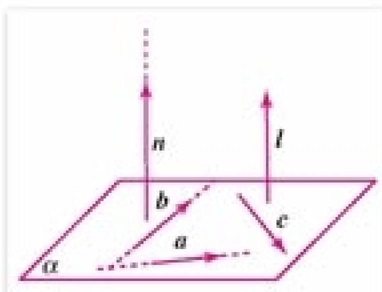


图 3-32

由平面法向量的定义可知，平面 α 的一个法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量.

由于同时垂直于同一平面的两条直线平行，可以推知，一个平面的所有法向量互相平行.

由平面法向量的性质，很容易通过向量运算证明直线与平面垂直的判定定理.

如果一条直线和平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

已知 a，b 是平面 α 内的两条相交直线，且直线 $n\perp a$，$n\perp b$（图 3-33）.

求证：$n\perp\alpha$.

证明：设 m 是 α 内的任一条直线. 在 n，a，b，m 上分别取非零向量 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{m}$. 因

为 a 与 b 相交，由共面向量定理可知，存在唯一的数对 (x, y)，使

$$\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}.$$

由已知条件，可推知

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

因此 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$，得 $n\perp m$.

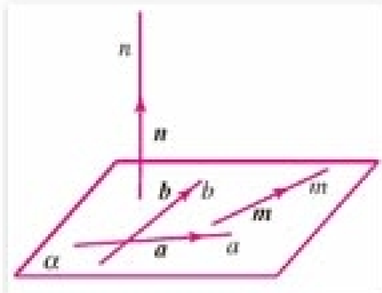


图 3-33

因为直线 n 垂直于平面 α 内的任一直线，所以直线 n 垂直于平面 α.

现在我们来研究问题：

设 A 是空间任一点(图 3-34)，$\boldsymbol{n}$ 为空间内任一非零向量，适合条件

$$\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad ①$$

的点 M 的集合构成什么样的图形？

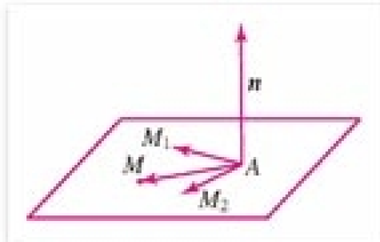


图 3-34

容易看出，如果任取两点 M_1，M_2(其中 M_1，M_2 和 A 三点不共线)，且

$$\overrightarrow{AM_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad \overrightarrow{AM_2}\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

则 $\boldsymbol{n}\perp$平面 AM_1M_2.

由直线与平面垂直的判定定理，就可以推知，在平面 AM_1M_2 内的任一点 M 都满足条件①式. 又知满足条件①的所有点 M 都在平面 AM_1M_2 内.

这就说明，我们可以用①式表述通过空间内一点并且与一个向量垂直的平面. ①式通常称为**一个平面的向量表示式.**

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则容易得到

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha /\!/ \beta \text{ 或 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 重合} \iff \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2;\\ \alpha\perp\beta \iff \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \iff \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0.\end{array}}$$

于是我们就可利用向量的平行或垂直的条件，来讨论平面的平行或垂直.

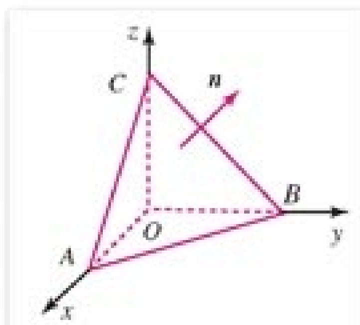


图 3-35

例 1 已知点 $A(a, 0, 0)$，$B(0, b, 0)$，$C(0, 0, c)$，其中 $abc\neq0$，如图 3-35，求平面 ABC 的一个法向量.

解：由已知可得

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0, b, 0)-(a, 0, 0)=(-a, b, 0),$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(0, 0, c)-(a, 0, 0)=(-a, 0, c).$$

设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，则

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(x, y, z)\cdot(-a, b, 0)=-ax+by=0,$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(x, y, z)\cdot(-a, 0, c)=-ax+cz=0.$$

由$\begin{cases}-ax+by=0\\-ax+cz=0\end{cases}$　解得 $y=\frac{a}{b}x$，$z=\frac{a}{c}x$.

不妨令 $x=bc$，则 $y=ac$，$z=ab$.

因此，可取 $\boldsymbol{n}=(bc, ac, ab)$为平面 ABC 的一个法向量.

已知平面 α 和一点 A，过点 A 作 α 的垂线 l 与 α 相交于点 A'，则 A'就是点 A 在平面 α 内的**正射影**，以下简称**射影**. 由上述定义可知，平面 α 内的任一点在 α 内的射影都是它自身.

图形 F 上所有的点在平面 α 内的射影所成的集合 F'，叫做图形 F 在平面 α 内的射影(图 3-36).

如果一条直线 AB 和平面 α 相交于点 B(图 3-37)，但不和 α 垂直，那么直线 AB 叫做**这个平面的斜线**. 斜线和平面的交点 B 叫做**斜足**，斜线上一点 A 与斜足 B 之间的线段叫做**斜线段** AB.

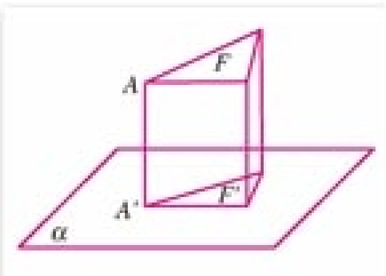


图 3-36

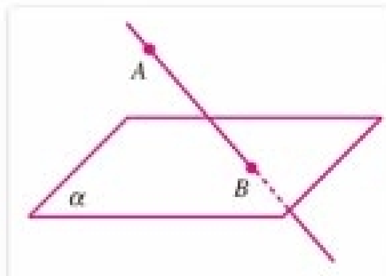


图 3-37

例 2　已知：AB，AC 分别是平面 α 的垂线和斜线，BC 是 AC 在 α 内的射影，$l\subset\alpha$ 且 $l\perp BC$(图 3-38).

求证：$l\perp AC$.

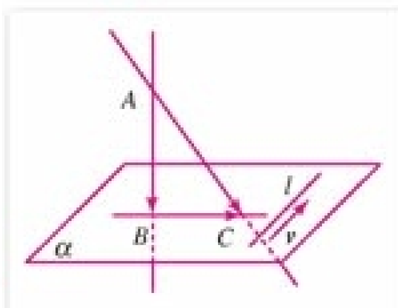


图 3-38

证明：取向量 $\boldsymbol{v}/\!/l$，则 $\boldsymbol{v}/\!/\alpha$，且 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{BC}$.

因为 $AB\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，所以

$$\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{AB}.$$

又因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{v}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\boldsymbol{v}\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{v}+\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{v}\\&=0.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{AC}$，得 $l\perp AC$.

本例证明所得的结论，通常称为三垂线定理.

三垂线定理　**如果在平面内的一条直线与平面的一条斜线在这个平面内的射影垂直，则它也和这条斜线垂直.**

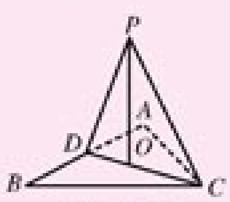
类似地可以证明：

三垂线定理的逆定理　**如果平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直，则它也和这条斜线在平面内的射影垂直.**

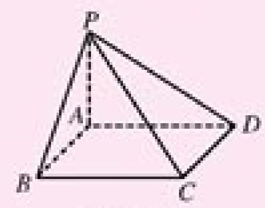
想一想，如果在三垂线定理中，已知条件改为：直线l//平面α，并且直线l垂直于斜线AC在平面α内的射影BC，直线l是否还垂直于斜线AC？

练习A

1. 已知四面体$ABCD$，棱$AB=AC$，棱$DB=DC$，点M为棱BC的中点，自己作图并指出，哪两点确定的位置向量是平面ADM的法向量？哪两个平面互相垂直？为什么？
2. 已知正方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$，写出平面ABC和平面$AB'C$的一个法向量.
3. 已知$A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$，求平面ABC的一个单位法向量的坐标.
4. 如图，已知$PO\perp$平面ABC，$AC=BC$，D为AB的中点，求证：$AB\perp PC$.



（第4题）



（第5题）

5. 如图，已知四棱锥$P\text{-}ABCD$的底面$ABCD$是平行四边形，且$PA\perp$底面AC，如果$BC\perp PB$，求证$ABCD$是矩形.

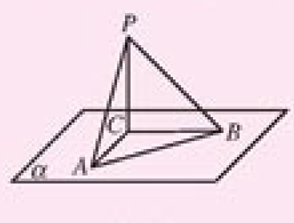
练习B

1. 已知正方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$，分别写出两个对角面的一个法向量，并证明两个对角面互相垂直.
2. 已知$A(3, 0, 0)$，$B(0, 4, 0)$，$C(0, 0, 5)$，求平面ABC的单位法向量.
3. 填空：在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$PC\perp$平面ABC，则其中：

   (1) 与PC垂直的直线有______；

   (2) 与AP垂直的直线有______；

   (3) 直角三角形有__________.



（第3题）

4. 已知四面体$ABCD$的棱$AB\perp CD$，$AC\perp BD$，求证：$AD\perp BC$.

探索与研究

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，任给一个三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad ①$$

以它的解(x, y, z)为坐标的点的集合是否构成一个平面？

假定 $P(x_0, y_0, z_0)$是三元一次方程的一组解，则

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \quad ②$$

①－②，整理可得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \quad ③$$

作向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$（图 3-39），满足方程③的向量

$$\overrightarrow{PM}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

端点 M 的轨迹（集合）是什么图形？

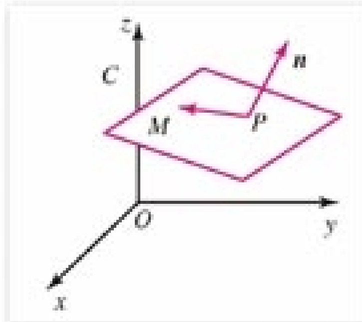


图 3-39

3.2.3 直线与平面的夹角

如果一条直线与一个平面垂直，我们规定这条直线与平面的夹角为 90°.

如果一条直线与一个平面平行或在平面内，我们规定这条直线与平面的夹角为 0°.

平面的一条斜线与平面的夹角如何定义呢？

我们先研究如何计算平面的斜线与该平面内任一条直线的夹角.

如图 3-40，已知 OA 是平面α 的斜线段，O 是斜足，线段 AB 垂直于α，B 为垂足，则直线 OB 是斜线OA 在平面α 内的正射影. 设 OM 是α 内通过点O 的任一条直线，OA 与 OB 所成的角为 θ_1，OB 与 OM 所成的角 θ_2，OA 与 OM 所成的角为θ. 下面我们用向量的运算来研究 θ，θ_1，θ_2 之间的关系.

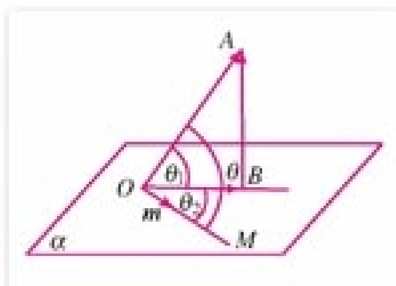


图 3-40

在直线 OM 上取单位向量 $\boldsymbol{m}$，则$\overrightarrow{BA}\perp\boldsymbol{m}$，即$\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}=0$.

因为$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$，所以

$$\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{m}=\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{m}+\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m},$$

因此$\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{m}=\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{m}$，即

$$|\overrightarrow{OA}|\cos\theta=|\overrightarrow{OB}|\cos\theta_2,$$

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}\cos\theta_2.$$

又因为$\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\cos\theta_1$，所以

$$\boxed{\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2.} \quad ①$$

在上述公式中，因为$0\leqslant\cos\theta_2\leqslant1$，所以

$$\cos\theta\leqslant\cos\theta_1.$$

因为θ_1和θ都是锐角或直角，所以$\theta_1\leqslant\theta$.

由此我们得到：

斜线和它在平面内的射影所成的角，是斜线和这个平面内所有直线所成角中最小的角.

在公式①中，如果$\theta_2=90°$，你能得出什么结论？

斜线和它在平面内的射影所成的角叫做**斜线和平面所成的角**（或**斜线和平面的夹角**）.

如图 3-41，设向量$\overrightarrow{AB}$在平面α内的射影为$\overrightarrow{A'B'}$，且直线AB与平面α夹角为θ，则$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\rangle=\theta$. 易证

$$|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

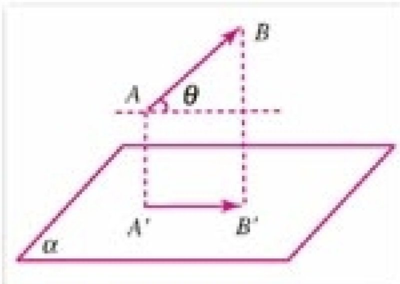


图 3-41

例 $\angle BAC$在平面α内，过该角的顶点A引平面α的斜线AP，且使$\angle PAB=\angle PAC$，求证斜线AP在平面α内的射影平分$\angle BAC$及其对顶角(图 3-42).

证明：如图 3-42，设点P在α内的射影为点M，则AM为AP在平面α内的射影.

沿射线AB，AC的方向分别取单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，则由$PM\perp$平面α，得

$$\overrightarrow{MP}\perp\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{MP}\perp\boldsymbol{j},$$

即$\overrightarrow{MP}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\overrightarrow{MP}\cdot\boldsymbol{j}=0$.

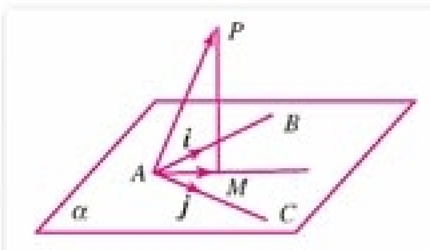


图 3-42

因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}$，所以

$$\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{i}=\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{j}=\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{j},$$

即

$$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB=|\overrightarrow{AM}|\cos\angle BAM,$$
$$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAC=|\overrightarrow{AM}|\cos\angle CAM.$$

比较以上两式，因为$\cos\angle PAB=\cos\angle PAC$，所以

$$\cos\angle BAM=\cos\angle CAM,$$

因此$\angle BAM=\angle CAM$.

即直线AM平分$\angle BAC$及其对顶角.

练习A

1. 设线段 $AB=l$，直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ，求线段 AB 在平面 α 内的射影长（精确到 0.1）：

   (1) $l=6$，　$\theta=\frac{\pi}{3}$；　　　(2) $l=10$，　$\theta=0$；

   (3) $l=8$，　$\theta=\frac{\pi}{2}$；　　　(4) $l=8$，　$\theta=72°$.

2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，写出对角线 BD_1 分别与平面 AC，平面 BA_1，平面 BC_1 所成的角，并求这些角的余弦.

3. 已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=a$，$AB=2a$，求对角线 BD_1 与长方体各面所成的角的余弦.

练习B

1. 利用本节的公式①证明本节的例题.

2. 已知平面内的一条直线与平面的一条斜线的夹角为 60°，这条直线与斜线在平面内的射影的夹角为 45°，求斜线与平面所成角的大小.

3. 已知一个平面通过一个角的平分线，求证角的两边与这个平面的夹角相等.

3.2.4 二面角及其度量

平面内的一条直线把平面分为两部分，其中的每一部分都叫做**半平面**. 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**，这条直线叫做**二面角的棱**，每个半平面叫做**二面角的面**. 棱为 l，两个面分别为 α，β 的二面角，记作 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$. 如图，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，二面角也可以记作 $A\text{-}l\text{-}B$，也可记作 $_2\angle l$（图 3-43）.

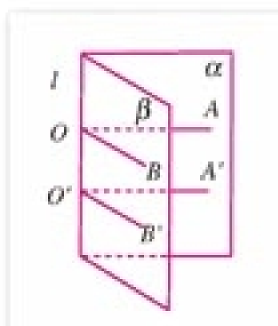


图 3-43

在二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的棱上任取一点 O，在两半平面内分别作射线 $OA\perp l$，$OB\perp l$，则 $\angle AOB$ 叫做**二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角**（图 3-43）. 显然，这个平面角与点 O 在 l 上的位置无关（为什么?）.

二面角的大小可以用它的平面角来度量. 二面角的平面角是几度，就说这个二面角是

几度．我国发射的第一颗人造卫星的倾角是 68.5°，这个倾角指的就是人造卫星的轨道平面和地球赤道平面所成的角(图 3-44)．

图 3-44

本书中，我们约定，二面角不小于 0°，不大于 180°．

平面角是直角的二面角叫做**直二面角**(图 3-45)．互相垂直的平面也就是相交成直二面角的两个平面．

我们可用向量的夹角来研究二面角的性质及其度量．

如图 3-46 所示，分别在二面角 α-l-β 的面 α，β 内，作向量 $\boldsymbol{n}_1\perp l$，$\boldsymbol{n}_2\perp l$，则我们可以用向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角来度量这个二面角．

如图 3-46，设 $\boldsymbol{m}_1\perp\alpha$，$\boldsymbol{m}_2\perp\beta$，则角$\langle\boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2\rangle$与该二面角大小相等或互补．

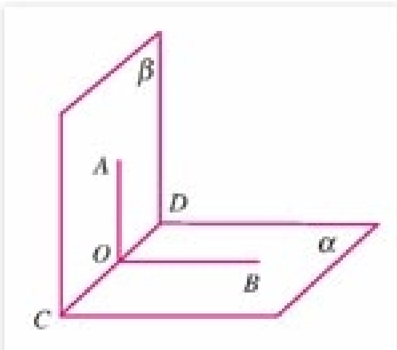


图 3-45

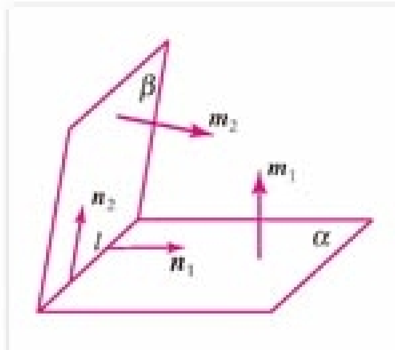


图 3-46

例 1　如图 3-47，已知在一个二面角的棱上有两个点 A，B，线段 AC，BD 分别在这个二面角的两个面内，并且都垂直于棱 AB，$AB=4$ cm，$AC=6$ cm，$BD=8$ cm，$CD=2\sqrt{17}$ cm，求这个二面角的度数．

解：设$\langle\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\rangle=x$．

由已知 $CA\perp AB$，$AB\perp BD$，得

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0,$$

$$\langle\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BD}\rangle=180^\circ-x,$$

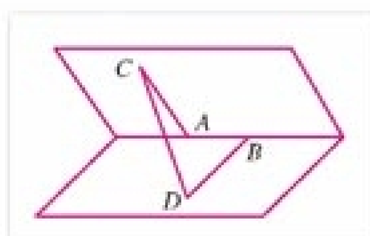


图 3-47

因此

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CD}|^2&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2\\&=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{BD}|\cos(180^\circ-x).\end{aligned}$$

代入已知线段的长度，得

$$(2\sqrt{17})^2=6^2+4^2+8^2+2\times6\times8\times(-\cos x),$$

即

$$\cos x=\frac{36+16+64-68}{96}=\frac{48}{96}=\frac{1}{2},$$

得 $x=60^\circ$．

因此，所求二面角的度数为 60°．

例 2　已知：二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的度数为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，在 α 面内有 $\triangle ABC$，它在 β 内的射影为 $\triangle A'BC$，它们的面积分别为 S，S'.

求证：$S'=S\cos\theta$.

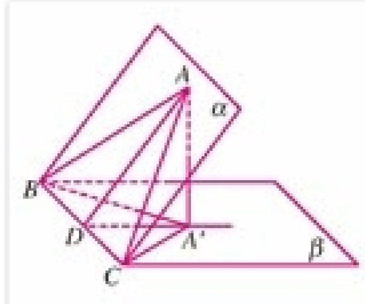


图 3-48

证明：不妨假定 $\triangle ABC$ 的边 BC 在 l 上（图 3-48），作 BC 边上的高 AD，AD 在 β 内的射影为 $A'D$. 根据正射影的性质，知

$$A'D=AD\cos\theta.$$

$$S'=\frac{1}{2}BC\times A'D=\frac{1}{2}BC\times AD\cos\theta=S\cos\theta.$$

注　在例 2 中，把 $\triangle ABC$ 换为 α 内的多边形或其他任意图形，所证公式仍然成立. 设 S 是 α 内的任一平面图形的面积，它在平面 β 内正射影的面积为 S'，则 $S'=S\cos\theta$.

例 3　已知 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle DAB=\angle ABC=90°$，$SA$ 垂直平面 $ABCD$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$，求平面 SAB 与 SCD 的夹角的正切（图 3-49）.

分析：这道例题，可以用多种方法求解. 一种解法是，构造两个平面 SAB 和 SCD 的交线和二面角. 构造交线要找两个交点，已知一个 S，还要找另一个，依题的条件另一交点是 BA 和 CD 的交点；交线找到，下一步要构造二面角. 找出要求的二面角的平面角，问题就解决了.

我们还可以用例 2 中所介绍的一个图形与它某个平面内的正投影面积之间的关系来求解. 容易看出 $\triangle SAB$ 是 $\triangle SCD$ 在平面 SAB 内的正射影. 计算出两个三角形面积，二面角也就可以求出了.

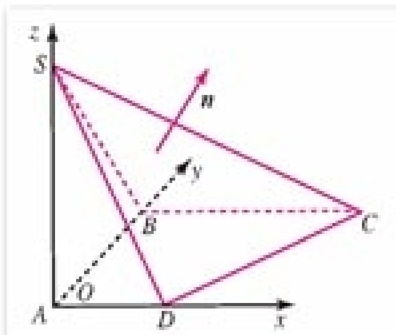


图 3-49

下面我们用向量法求解. 上面介绍的两种方法，请同学们自己完成，并总结三种解法的特点，从中体会从不同的角度去解决立体几何问题.

解：令 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AS}=\boldsymbol{k}$，以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系 $[O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}]$，则 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为单位正交基底. 于是可得

$$\boldsymbol{i}=(1,\ 0,\ 0),\ \boldsymbol{j}=(0,\ 1,\ 0),\ \boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ 1),$$

$$\overrightarrow{SD}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -1\right),\quad \overrightarrow{SC}=(1,\ 1,\ -1).$$

设平面 SCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SD}=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0.$$

换用坐标表示，得

$$(x,\ y,\ z)\cdot\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -1\right)=0,$$

$$(x,\ y,\ z)\cdot(1,\ 1,\ -1)=0,$$

即$\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-z=0\\ x+y-z=0\end{cases}$

把 z 作为已知数，解此方程组，得 $x=2z$，$y=-z$.

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,\ -1,\ 1)$. 因此

$$\cos\langle \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{n}|}$$

$$=\frac{(2,\ -1,\ 1)\cdot(1,\ 0,\ 0)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

设平面 SAB 与 SCD 的夹角为 θ，由图形可知 $\theta=\langle \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{n}\rangle$ 为锐角，即

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

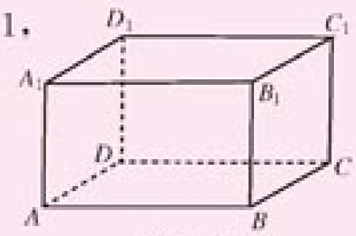
练习A

1. 已知正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的棱长都为 1，求侧面与底面的夹角.
2. 在 90° 二面角的棱上有两个点 A，B，AC，BD 分别是在这个二面角的两个面内，且都垂直于棱 AB. 已知 $AB=5$ cm，$AC=3$ cm，$BD=8$ cm，求 CD 长.
3. 已知 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 2,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 3)$，求三个坐标面与平面 ABC 夹角的余弦.
4. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3$，$BC=1$，$CC_1=\sqrt{3}$，求下列两个平面所成的角：

   (1) 平面 A_1BC 与平面 $ABCD$；

   (2) 平面 C_1AB 与平面 $ABCD$；

   (3) 平面 D_1AB 与平面 AA_1B_1B.



（第 4 题）

练习B

1. (1) 已知一正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的棱长都等于 a，求侧面与底面所成二面角的余弦.

   (2) 已知一正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的棱长都等于 a，求侧面与底面所成二面角的余弦.
2. $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，$CD\perp$ 平面 ABC，且 $CD=1$，求二面角 $B\text{-}AD\text{-}C$ 的大小(精确到 0.1°).

3.2.5 距离（选学）

1. 距离的概念

在几何学中，我们经常碰到要计算两个图形之间的距离．一个图形内的任一点与另一图形内的任一点的距离中的最小值，叫做**图形与图形的距离**（图 3-50）．

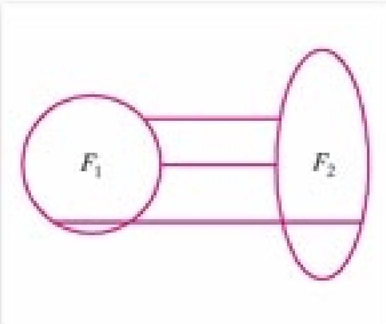


图 3-50

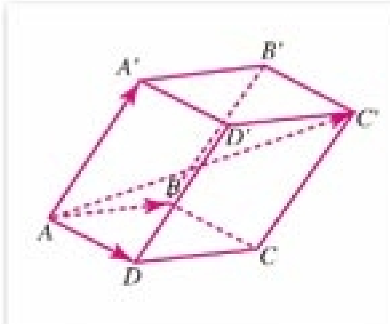


图 3-51

计算两点之间的距离和线段的长度是几何度量最基本的课题．计算任何图形之间的距离都可以转化为求两点之间的距离．下面举例说明如何用向量运算求两点之间的距离．

> 注　同样，例 1 可以通过构造三角形，再解三角形来求解．解法留给同学作为练习，并比较两种解法的内在联系．

例 1　已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$（图 3-51），$AB=4$，$AD=3$，$AA'=5$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BAA'=\angle DAA'=60^\circ$．求 AC' 的长．

解：因为 $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$，所以

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AC'}|^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})\\
&=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA'}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})\\
&=4^2+3^2+5^2+2(0+10+7.5)\\
&=85.
\end{aligned}
$$

因此 $|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{85}$．

2. 点到平面的距离

我们知道，过平面 α 外一点 P 有唯一的一条直线 PA 垂直 α（图 3-52）．设 A 是垂足，B 是 α 内异于 A 的任一点，由 $\triangle PAB$ 是直角三角形可得

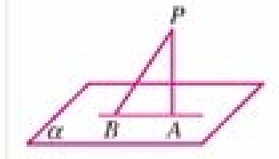


图 3-52

$$PA<PB.$$

这就是说，**连接平面 α 外一点 P 与 α 内任意一点的所有线段**

中，垂线段 PA 最短.

一点到它在一个平面内正射影的距离，叫做点到这个平面的距离.

3. 直线与它的平行平面的距离

我们知道，如果一条直线平行于平面 α，则直线上的各点到平面所作的垂线段相等，即各点到 α 的距离相等(图 3-53).

一条直线上的任一点，与它平行的平面的距离，叫做直线与这个平面的距离.

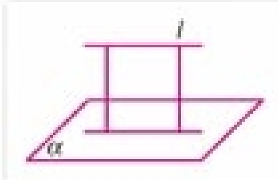


图 3-53

4. 两个平行平面的距离

和两个平行平面同时垂直的直线，叫做两个平面的公垂线. 公垂线夹在平行平面间的部分，叫做两个平面的公垂线段.

如图 3-54，平面 α∥平面 β，直线 AA'，BB'都是它们的公垂线段，由四边形 $AA'B'B$ 是矩形可知，两平行平面的公垂线段都相等.

两平行平面的公垂线段的长度，叫做两平行平面的距离.

计算以上图形之间的距离，我们可以用勾股定理、三角函数和向量的内积运算求解得. 下面我们举例说明，如何用向量运算来求点到平面的距离.

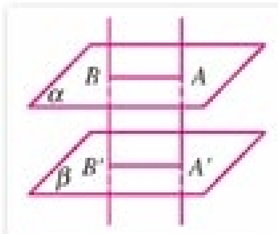


图 3-54

例 2 如图 3-55，已知四棱锥 S-$ABCD$，$SA\perp$底面 $ABCD$；$\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$，$AB=4$，$BC=3$，$AS=4$，$E$ 是 AB 的中点，F 在 BC 上，且 $BF=\frac{1}{2}FC$，求点 A 到平面 SEF 的距离.

解：以点 A 为坐标原点，分别以直线 AD，AB，AS 的为 x 轴，y 轴，z 轴建立直角坐标系 $Oxyz$，如图 3-55 所示，则

$A(0,0,0)$，$E(0,2,0)$，$F(1,4,0)$，$S(0,0,4)$，

$\overrightarrow{AS}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{SE}=(0,2,-4)$，$\overrightarrow{SF}=(1,4,-4)$.

设平面 SEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{SE}\cdot\boldsymbol{n}=0，且\ \overrightarrow{SF}\cdot\boldsymbol{n}=0，$$

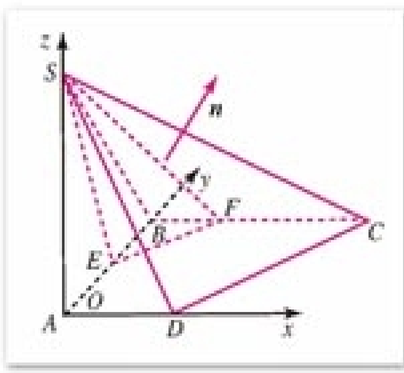


图 3-55

即

$$(0,2,-4)\cdot(x,y,z)=2y-4z=0，$$

且

$$(1,4,-4)\cdot(x,y,z)=x+4y-4z=0.$$

在上面的两个方程中，令 $z=k$，则可解得

$$x=-4k,\quad y=2k,\quad z=k.$$

所以 $\boldsymbol{n}=(-4k,2k,k)$，$\boldsymbol{n}$ 的单位向量

$$n_0=\left(-\frac{4}{\sqrt{21}},\ \frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{1}{\sqrt{21}}\right).$$

因此，点 A 到平面 SEF 的距离

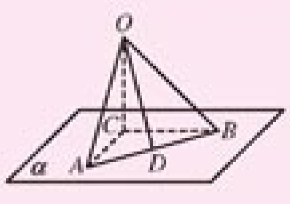
$$\begin{aligned}d&=|\overrightarrow{AS}\cdot n_0|\\&=\left|(0,\ 0,\ 4)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{21}},\ \frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{1}{\sqrt{21}}\right)\right|\\&=\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.\end{aligned}$$

练习A

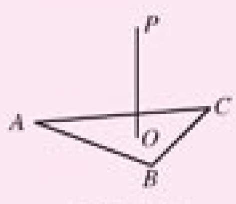
1. 与已知平面 α 距离等于 3 cm 的所有点的集合是什么图形？
2. 已知平面 α∥平面 β，且两平面的距离为 4 cm，与 α，β 距离相等的所有点集合是什么图形？
3. 已知二面角 α-l-β 为 45°，点 $A\in\alpha$，点 A 到棱 l 的距离等于 a，求点 A 到平面 β 的距离.
4. 已知正四面体 $ABCD$，棱长为 1，点 M，N 分别是棱 AB，CD 的中点，求 M，N 间的距离.

练习B

1. 如图，已知 Rt△ABC 在平面 α 内，D 是斜边 AB 的中点，AC=6 cm，BC=8 cm，$OC\perp\alpha$，OC=12 cm，求线段 OA，OB，OD 的长.



（第 1 题）

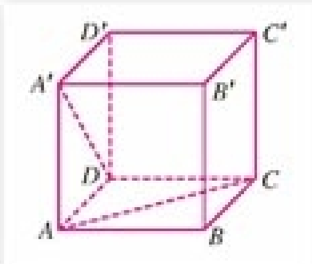


（第 2 题）

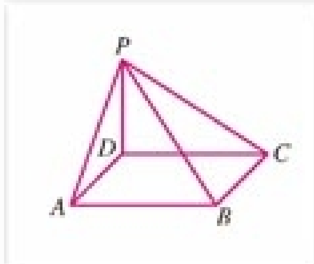
2. 如图，正三角形 ABC 的中心 O，边长为 2 cm，$OP\perp$平面 ABC，且 OP=2 cm，求点 P 到这个正三角形各边的距离.
3. 已知 $A(2,\ 2,\ 0)$，$B(1,\ 4,\ 2)$，$C(0,\ 0,\ 5)$，求原点 O 到平面 ABC 的距离.

习题3-2 A

1. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，求 DA' 与 AC 的夹角.



（第1题）



（第2题）

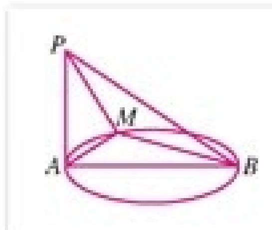
2. 如图，已知 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 平面 AC，$PD=3$，$AB=5$，$BC=4$，求下列异面直线所成角的大小：

(1) PC 与 AB；　(2) PD 与 AB；　(3) PA 与 BC.

3. 在下列各题中，已知线段 AB 和它在平面 α 内的正射影 $A'B'$ 的长，求直线 AB 和平面 α 所成的角：

(1) $AB=8$，$A'B'=4$；　(2) $AB=\sqrt{2}$，$A'B'=1$；

(3) $AB=4$，$A'B'=4$；　(4) $AB=2$，$A'B'=0$.



（第4题）

4. 已知 AB 是圆的直径，且 $AB=4$，PA 垂直圆所在的平面，且 $PA=3$，M 是圆上一点，且 $\angle ABM=30°$. 求二面角 $A\text{-}BM\text{-}P$ 的大小.

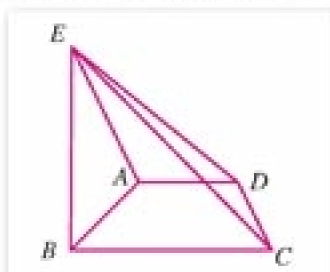
5. 已知 AB 垂直平面 α 于点 B，AO 与 α 相交于点 O，$\angle AOB=60°$，射线 OC 在 α 内，且 $\angle BOC=30°$，$OA=6$，求点 A 与直线 OC 的距离.

6. 与 $\triangle ABC$ 三顶点距离相等点的集合构成什么图形?

7. 已知直角梯形 $ABCD$，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=BC=6$，$AD=3$，$BE=5$，求：

(1) 点 B 到平面 CDE 的距离；

(2) 二面角 $A\text{-}CD\text{-}E$ 的大小.



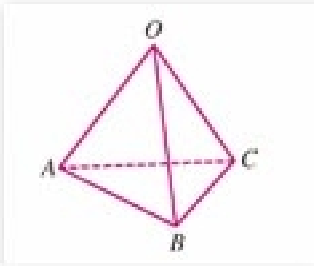
（第7题）

习题3-2 B

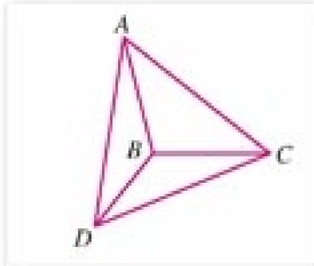
1. 已知三个平面 AOB，BOC，AOC 相交于一点 O，$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=60°$，求直线 OA 与平面 OBC 所成角的大小.

2. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 所在的平面互相垂直，且 $AB=BC=BD$，$\angle CBA=\angle CBD=120°$，求：

(1) AD 所在直线和平面 BCD 所成角的大小；



（第1题）



（第2题）

(2) AD 所在直线与直线 BC 所成角的大小；

(3) 二面角 A-BD-C 的大小.

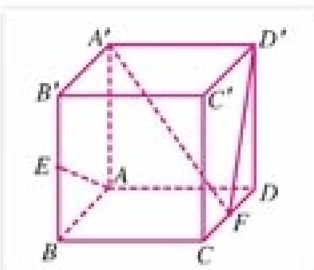
3. 已知平面 α//平面 β，且点 $A\in\alpha$，$B\in\beta$，$AB=6$ cm，AB 在平面 β 内的正投影长为 3 cm，求两平行平面的距离.

4. 已知正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$，E，F 分别是 BB' 和 CD 的中点：

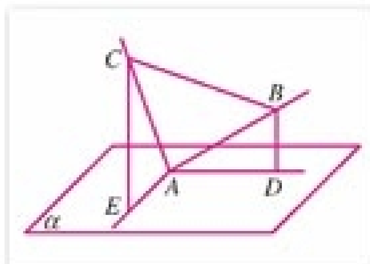
(1) 求异面直线 AE 与 $D'F$ 所成角的大小；

(2) 求证 $AE\perp$平面 $A'D'F$.

5. 已知直线 AB 与平面 α 所成的角为 $30°$，直线 AC 与平面 α 所成的角为 $60°$，$AB=6$ cm，$AC=8$ cm，且斜线段 AB，AC 在平面 α 内的射影互相垂直，求 BC 的长.



（第4题）



（第5题）

本章小结

Ⅰ 知识结构

空间向量及其运算→空间向量的分解定理→空间向量的直角坐标运算

空间向量在立体几何中的应用

直线的方向向量与应用：

确定直线上点的位置及共线的条件

计算两条直线所成的角

判断直线平行或垂直

如果 $\boldsymbol{v}_1 /\!/ l$，$\boldsymbol{v}_2 /\!/ m$，则

$$l /\!/ m \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2$$

$$l \perp m \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2$$

用向量研究两平面的位置关系

点 P 与 A，B，C 三点共面$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，对平面 α 内的任一点 A，

$$点\ P\ 在\ \alpha\ 内 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

如果 $\boldsymbol{n}_1\perp\alpha$，$\boldsymbol{n}_2\perp\beta$

$$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$$

$$\alpha/\!/\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$$

平面 α 与 β 夹角的余弦$=\pm\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$.

Ⅱ 思考与交流

1. 空间任意两个向量是否共面，任意两个向量的基线是否共面？空间任意三个向量是否共面？

2. 空间向量的线性运算与平面向量的线性运算有什么不同？

3. 谈谈你对空间向量分解定理的认识.

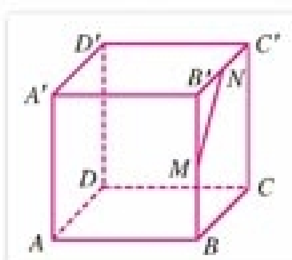
4. 如何用两条直线的方向向量研究它们的位置关系？一直线的方向向量有多少个？它们之间有什么关系？如果知道直线上两点的坐标，如何计算这条直线的方向向量和单位方向向量？

5. 如何用向量关系式表示空间的平面？一个平面的法向量只有一个吗？如果有多个，它们之间有什么关系？

6. 如何用两个平面的法向量研究两个向量的位置关系？
7. 如何用向量方法求异面直线所成的角、直线与平面的夹角、二面角的大小？
8. 如何计算两点间的距离及点到直线、点到平面的距离？

Ⅲ 巩固与提高

1. 判断下列命题的真假：
   (1) 两个向量一定共面，三个向量不一定共面；
   (2) 任给三个向量，空间任一向量都可用这三个向量表示；
   (3) 过直线上一点可以作无数个向量与这条直线垂直，并且这些向量都在同一平面内；
   (4) 垂直于同一平面的所有向量一定共面；
   (5) 任意一个平行六面体的四条对角线长相等；
   (6) 存在两个非零向量，其内积等于零，但这两个向量不垂直.
2. 填空题：
   (1) 在空间到两定点距离相等的点的轨迹是______；
   (2) 已知$\triangle ABC$，点O在平面ABC外，$\overrightarrow{OA_1}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB_1}=3\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC_1}=3\overrightarrow{OC}$，则$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A_1B_1C_1}=$______；
   (3) 已知正方形$ABCD$的边长为a，$AP\perp$平面$ABCD$，且$AP=b$，则$PC=$______；
   (4) 已知正方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$，则直线AC'与直线BC所成角的大小等于______；
   (5) 已知$\triangle ABC$，$\angle BAC=90°$，P为平面ABC外一点，且$PA=PB=PC$，则平面PBC与平面ABC的关系是______.
3. 求证：对空间任意两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，满足等式
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2).$$
4. 已知正方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$，求直线AC'与直线$A'B$所成的角.
5. 求证：对角线相等的平行六面体是长方体.
6. 已知平行六面体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$各棱长都是1，$\angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60°$，求对角线$AC'$长.
7. 在一个直二面角$\alpha\text{-}l\text{-}\beta$的棱$l$上有两点$A$，$B$，线段$AC\subset\alpha$，线段$BD\subset\beta$，并且$AC\perp l$，$BD\perp l$，$AB=6$，$AC=6$，$BD=24$，求$CD$的长.
8. 已知正方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$的棱BB'和$B'C'$的中点为M，N，求：
   (1) MN和CD所成的角；　　(2) MN和AD所成的角.

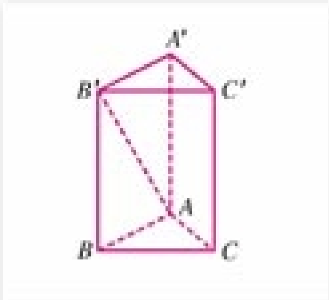


（第8题）

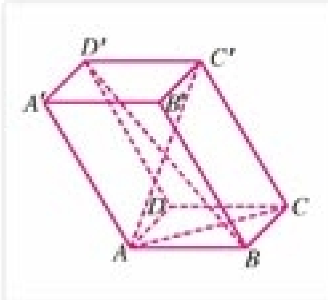
9. 在正四棱柱中，底面面积是144 cm²，高是5 cm，求棱柱的对角线长.

10. 一条线段夹在一个直二面角内，它和两个面所成的角都是 $30°$，求这条线段与这个直二面角的棱所成的角.

11. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 中，底面是边长为 a 的正三角形，$AA'=\sqrt{2}a$，求直线 AB' 与侧面 AC' 所成的角.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的底面是边长为 1 的正方形，侧棱 AA' 的长为 3，$\angle BAA'=\angle DAA'=120°$，求：

(1) 对角线 AC' 和 BD' 的长；

(2) BD' 与 AC 所成角的余弦值.

13. 已知平行四边形 $ABCD$ 的顶点 $A(1,-3,0)$，$B(-2,4,1)$，$C(-3,1,1)$，求顶点 D 的坐标.

14. 已知三棱锥的底面是两条直角边长分别为 6 cm 和 8 cm 的直角三角形，各侧面与底面所成的角为 $60°$，求棱锥的高.

IV 自测与评估

1. (选择题) 设 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 是棱长为 a 的正方体，AC' 与 BD' 相交于点 O，则有（　　）.

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}=a^2$　　(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}=\sqrt{2}a^2$

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}a$　　(D) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA'}=a^2$

2. 已知空间三点 $A(1,0,0)$，$B(3,1,1)$，$C(2,0,1)$. 试求线段 AB，BC 的长度及 $\angle BAC$.

3. 已知 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(1,1,1)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 都垂直的单位向量.

4. 点 $A(1,0,3)$，$B(1,2,1)$，$C(0,2,1)$ 按向量 $(2,1,5)$ 平移到 A'，B'，C' 位置，求点 A'，B'，C' 的坐标.

5. 已知 A，B，C，D，E 为五个不共面的点，如果 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$，则 A，C，D 和 E 共面. 这个命题正确吗？说明理由.

6. A，B 为空间的两个不同的点，且 $AB=1$，空间中适合条件$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$ 的点 M 的集合是怎样的一个图形？

7. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\angle C$ 为直角，且$\angle BAC=30°$，$AD\perp$ 平面 ABC，并且$AD=AB=a$，求：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$；$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$.

8. 已知正四棱锥 S-$ABCD$ 的所有棱长都等于 1，求二面角S-AB-C的度数（精确到 0.1）.

9. 已知 A，B，C，D 是空间的四个不同的点，求证直线 AC 垂直于 BD 的充分必要条件是

$$AD^2+BC^2=CD^2+AB^2.$$

10. 已知四面体 $OABC$ 各棱长为 1，D 是棱 OA 的中点，求：

(1) 异面直线 BD 与 AC 所成角的大小；

(2) 四面体 $OABC$ 的体积.

11. 已知平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，棱 $AA_1=5$，$\angle BAA_1=\angle DAA_1=60°$，求：

(1) 棱 AA_1 与底面 $ABCD$ 所成角的大小；

(2) 这个平行六面体的体积.

12. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 D_1C_1，B_1C_1 的中点，求平面 EFC 与底面 $ABCD$ 所成二面角的正切值.

数 学 文 化

阅读与欣赏

向量的叉积及其性质

大家已经知道，向量是解决空间中平行、长度和角度的度量等问题的锐利武器. 下面我们介绍向量的叉积运算，它在求平面之间的夹角、面积和体积问题时，有广泛应用.

给定空间中不共面的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，假设它们的始点都是 O. 如图 1 所示，如果此时 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的位置关系和右手的拇指，食指，中指的位置关系相同，我们就称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 构成右手系.

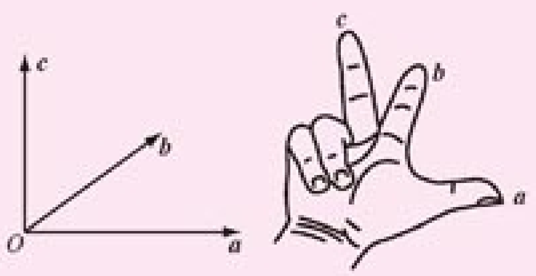


图 1

如图 2 所示，给定两个不共线的空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，它们的叉积是满足下列条件的向量 $\boldsymbol{c}$：

(1) $\boldsymbol{c}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$；

(2) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 构成右手系；

(3) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的叉积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，读作“$\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$”. 值得注意的是，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 就是以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积（如图 2）.

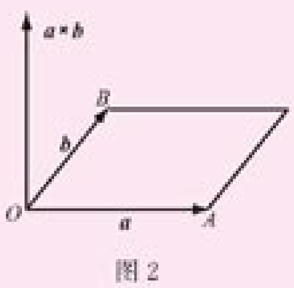


图 2

如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，我们规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

两个向量的叉积运算，满足以下运算律.

对任意三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

下面介绍，如何在空间直角坐标系中，用向量的坐标来进行向量的叉积运算.

如果 a，b，c，d 都是实数，我们规定

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为单位正交基底，而且它们构成右手系. 则显然

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2.$$

如果 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=&(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\\&\times(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\=&(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2\\&+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3\\=&\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

由此可知，空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形（如图 2）的面积为

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

附 录

部分中英文词汇对照表

逻辑联结词	logical connective
或	or
且	and
非	not
原命题	original proposition
逆命题	inverse proposition
否命题	negative proposition
逆否命题	inverse and negative proposition
充分条件	sufficient condition
必要条件	necessary condition
充要条件	sufficient and necessary condition
曲线的方程	equation of curve
解析几何	analytic geometry
圆锥曲线	conic sections
椭圆	ellipse
焦距	focal distance
焦点	focus
对称性	symmetry
离心率	eccentricity
双曲线	hyperbola
渐近线	asymptote
准线	directrix
抛物线	parabola
空间向量	space vector
平行向量	parallel vector
共面向量	coplanar vector
参数	parameter

后　记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授．从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查．

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文．我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善．现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者，实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶．

各实验区参加教材审读、研讨及修改主要成员有：

韩际清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颉、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勘、王宗武、黄武昌．

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒风杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳．

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意．

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的学校领导和师生们．

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力．

我们的联系方式如下：

电话：010-58758523　010-58758532

电子邮件：longzw@pep. com. cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组